РГП «ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МЕХАНИКИ»
КОМИТЕТА ПО НАУКЕ ПРИ МИНИСТЕРСТВЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

К.Б.Джакупов

КОРРЕКЦИИ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ПАРАДОКСОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Алматы
2009

УДК 532.516
ББК 22.5
Д 40

Рекомендовано к изданию
РГП «Институт математики, информатики и механики»

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук, академик НАН РК
Т.Ш.Кальменов;
доктор физико-математических наук, профессор ***М.Т.Дженалиев***

Джакупов Кенес Бажкенович
Д 40 Коррекции теоретических парадоксов механики сплошных сред – Алматы: Типография «К2», 2009. – 270с.
ISBN 978-601-0288-5

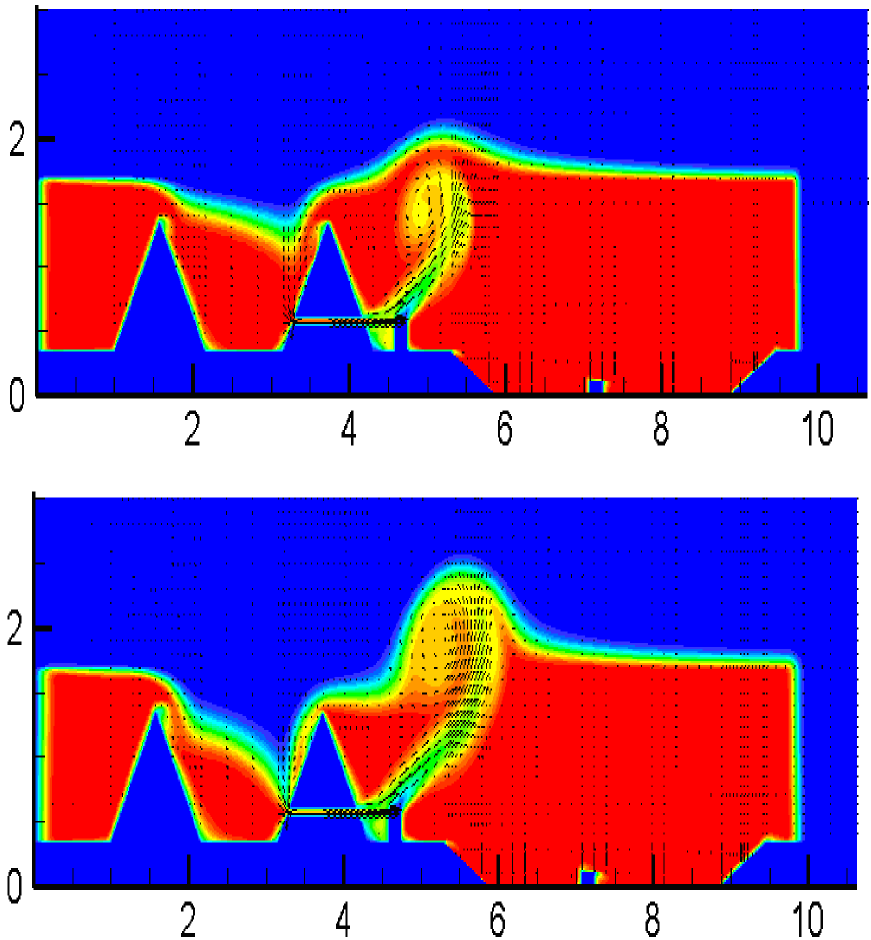
В монографии приводятся парадоксы гипотез Стокса и Навье-Коши-Ламе. Теоретически обоснованы новые уравнения динамики вязких жидкостей, теории упругости. Рекомендуется студентам, магистрантам, аспирантам, докторантам и исследователям, специализирующимся в области гидроаэромеханики и теории упругости.

Д $\frac{1603040000(}{00(05)-09}$

ББК 22.5

ISBN 978-601-0288-5

ОГЛАВЛЕНИЕ



Влияние выдува из туннели на перенос примеси в моменты времени n=18400, n=31200, n=54800, сетка500x150, Re=80000, число Маха Mx=0.05, τ *=0.0005*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга составлена на основе прочитанных автором в течение многих лет лекций по «Механике сплошной среды» и «Вычислительной механике» на механико-математическом факультете Казахского Национального Университета им.*аль-Фараби.* Содержание книги отражает современное критическое осмысление ряда устоявшихся фундаментальных принципов и основных понятий механики континуума, в том числе гидродинамики, а также отдельных аспектов практических приложений. Только чрезвычайной актуальностью рассматриваемых здесь проблем мотивируется сведение их в одной книге с целью привлечь к ним должного внимания, тем более, что преподавание многих университетских курсов, как правило, начинается с изложения этих основных понятий и принципов. Кратко укажем на некоторые из них. Это: неадекватное применение формулы *Эйлера-Лейбница* при выводе уравнений динамики в напряжениях и других уравнений сплошной среды; представление ряда *Тейлора* (неполного дифференциала) с разделением на симметричную и антисимметричную частей (что в некоторых учебниках формулируется как первая теорема *Гельмгольца*); неправильная трактовка теоремы об изменении момента количеств движений системы частиц применительно к произвольному объему сплошной среды, что послужило причиной ложного теоретического утверждения о «симметричности» тензора напряжений в сплошной среде. Именно *ложная симметричность тензора напряжений* и входящий составной частью в ряд *Тейлора* симметричный тензор скоростей деформаций были положены *Стоксом* в основу *гипотезы* об обобщенном законе *Ньютона, ошибочность* которого здесь доказывается. Поэтому сформулированные в 1845г. уравнения *Стокса* являются неверными, по этой причине они не могут быть использованы в качестве математических моделей течений сжимаемого вязкого газа, несжимаемой жидкости с переменной вязкостью.

Разумеется, логичной является, с *точки зрения несимметричности тензора напряжений,* необходимость пересмотра уравнений *Навье-Коши-Ламе* в теории упругости.

Основные результаты доложены на семинарах по механике, на Международных научных конференциях и съездах по математике и механике, состоявшихся в Казахском Национальном университете им. Аль-Фараби в 2006-2011г.г., Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 60-летию механико-математического факультета Томского университета 22-24 сент.2008г. г.Томск.

Гл.-1. ОШИБОЧНОСТЬ УРАВНЕНИЙ *НАВЬЕ-СТОКСА*. НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО ГАЗА

Уравнения движения вязких жидкостей выводили французские ученые: в 1821г. *Навье*, в 1831г. *Пуассон* и 1843г. *Сен-Венан*. В 1845г. великий английский физик *Стокс предположил* существование линейной зависимости напряжений от компонент симметричного тензора скоростей деформаций и на их основе вывел уравнения динамики вязкого газа, названные в последующем уравнениями *Стокса* в отличие от уравнений *Навье* несжимаемой вязкой жидкости с постоянной вязкостью. Из-за отсутствия должного теоретического обоснования данной *Стоксом* зависимости *Л.Д.Ландау* назвал ее *гипотезой Стокса.* Гипотеза *Стокса* приводит к парадоксальным явлениям, противоречащим физической сущности напряжений, что вызвало сомнения в правильности построения на ее основе самих уравнений *Стокса*. Тщательные исследования выявили коренную ошибку гипотезы. Она заключается в том, что *Стокс* из ряда *Тейлора* $\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\overline{S}\,\delta\vec{r}$, преобразованного к виду $\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\dot{S}\delta\vec{r}+\hat{S}\delta\vec{r}$, для определения тензора вязких напряжений использовал только одну часть тензора перемещений $\overline{S}=\dot{S}+\hat{S}$, а именно симметричный тензор скоростей деформаций $\dot{S}$, при этом пренебрегая его *антисимметричной* частью $\hat{S}$, которое характеризует составную часть движения, а именно - не менее важное вращательное движение среды. Разумеется, такое пренебрежение парадоксально и алогично. Ошибка гипотезы *Стокса* связана в определенной мере с укоренившимся в теоретической физике *ошибочным положением,* по которому *тензор напряжений сплошной среды всегда симметричен*, (вывод симметричности тензора напряжений из теоремы об изменении момента количеств движения содержится почти во всех учебниках и монографиях /1/,/2/, /3/,/4/ и др.)

Возникла настоятельная необходимость в теоретическом обосновании в общем случае *несимметричности тензора напряжений сплошной среды, в том числе несимметричности тензора* *вязких напряжений, и, как следствие всего этого, обоснование ошибочности уравнений Стокса*.

Результатом проведенных в данной главе исследований являются новые уравнения динамики газа и жидкости с переменной вязкостью с несимметричным тензором напряжений *Ньютона*.

Нетрудно было видеть, что проблемы гипотезы *Стокса* и симметричности тензора напряжений тесно связаны с парадоксальными применениями основополагающих математических формул, в связи с чем их пересмотр здесь чрезвычайно необходим и целесообразен.

§1. Парадоксы формул *Эйлера, Лейбница*

В /1/ приведен *гидродинамический* вывод индивидуальной производной по времени для объема τ сплошной среды, ограниченного поверхностью σ:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau + \oiint_{\sigma}\Phi(\vec{v},\vec{n})\delta\sigma \ , \qquad (1)$$

именуемой в /1/ *формулой Эйлера*.

Здесь и в дальнейшем, следуя /1/, обозначаются: символом $\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$ произвольные бесконечно малые отрезки, проводимые в пространстве в данный момент времени в заданной точке среды, символом $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ - элементарные перемещения частиц жидкости, происходящие за бесконечно малый промежуток времени *dt*, $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ - вектор скорости, так же $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. В /2/ выводится формула

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau = \iiint_{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\delta\tau + \oiint_{\sigma}\Phi(\vec{v},\vec{n})\delta\sigma \, , \qquad (2)$$

используемая в /3/ как *формула Лейбница*. Ставится вопрос: какая из этих двух формул верная? Ответ на этот вопрос можно дать только на основании определения производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента. Для дифференцируемой подынтегральной функции $\Phi\vec{v}$ по *x,y,z,* по теореме *Остроградского-Гаусса* правая часть формулы *Лейбница* (2) сводится к объемному интегралу

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau=\iiint_{\tau}[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+div(\Phi\vec{v})]\delta\tau\ , \qquad (3)$$

В дальнейшем весьма часто будет применяться формула скорости относительного объемного расширения бесконечно малого *индивидуального* объема среды $\delta\tau$ из /1/:

$$\frac{d\delta\tau}{dt}=\delta\tau\cdot div\vec{v} \qquad (4)$$

Вывод данного выражения содержится в /1/, другое доказательство (4) дано здесь в §2. Парадоксы связаны с тем, что относительно выбора области интегрирования τ существуют два подхода.

Первый подход. Применен *Седовым Л.И.* в /2/, где в силу (4) считается, что объем τ сплошной среды является *движущейся областью*, т.е. является функцией времени $\tau=\tau(t)$, как сумма $\tau=\iiint_{\tau}\delta\tau$ *индивидуальных* объемов $\delta\tau=\delta\tau(t)$, зависящих от времени. Пусть в момент времени $t+\Delta t$ движущийся объем τ занимает положение $\tau'=\tau(t+\Delta t)$. Исходя из этого, *Седов Л.И.* в /2/ составляет отношение приращений

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\iiint_{\tau'}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau-\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t)\},$$

откуда в пределе получается *формула Лейбница* (2). Но в этом составленном *Седовым* выражении только функция Φ и объем $\tau'=\tau(t+\Delta t)$ взяты на момент времени $t+\Delta t$, не учтена зависимость $\delta\tau=\delta\tau(t+\Delta t)$. Если учитывать эту зависимость от времени, то по Седову отношение приращений должно быть составлено в форме

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\ \iiint_{\tau'}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)-\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t)\ \}, \qquad (5)$$

откуда в пределе получается выражение

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iiint_{\tau'}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)-\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t)\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iiint_{\tau'}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)-\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)+\right.$$

$$\left.+\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)-\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t)\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iiint_{\tau'-\tau}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)+\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)-\right.$$

$$\left.-\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t)\right\}=\oiint_{\sigma}\Phi(\vec{v},\vec{n})\delta\sigma+\iiint_{\tau}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\delta\tau),\qquad(6)$$

в силу того, что в области $\tau'-\tau$ элементарный объем равен $\delta\tau(t+\Delta t)=(\Delta\vec{r},\vec{n})\delta\sigma$, поэтому образуется скорость $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{v}$ и $\tau'-\tau\to\sigma$, $\vec{n}-$ орт внешней нормали к σ.

Итак, из (6) вытекает формула

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau=\iiint_{\tau}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\delta\tau)+\oiint_{\sigma}\Phi(\vec{v},\vec{n})\delta\sigma,\qquad(7)$$

что, очевидно, отличается от формул *Эйлера* (1) и *Лейбница* (2).

А если пойти дальше и учесть, что в движущемся объеме $\tau'=\tau(t+\Delta t)$ на момент времени $t+\Delta t$ и координаты частиц x,y,z поменяют места на $x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t)$, то отношение приращений должно иметь вид

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iiint_{\tau'}\Phi(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t),t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)-\right.$$

$$\left.-\iiint_{\tau}\Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t)\right\},$$

откуда после преобразований получается в пределе

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\Phi\delta\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iiint_{\tau'}\Phi(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t),t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)-\right.$$

$$-\iiint_{\tau}\Phi(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t),t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t)+$$

$$+\iiint_{\tau} \Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t) -$$

$$-\iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t)\delta\tau(t) \ \Big\} =$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{ \iiint_{\tau'-\tau} \Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t) +$$

$$+\iiint_{\tau} [\Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t) - \Phi(x, y, z, t)\delta\tau(t)] \ \Big\} =$$

$$= \oiint_{\sigma} \Phi(\vec{v}, \vec{n})\delta\sigma + \iiint_{\tau} \frac{d}{dt}(\Phi\delta\tau), \qquad (8)$$

Итак, из (8) вытекает иная формула производной по времени

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \Phi\delta\tau = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt}(\Phi\delta\tau) + \oiint_{\sigma} \Phi(\vec{v}, \vec{n})\delta\sigma, \qquad (9)$$

что отличается от формул *Эйлера* (1), *Лейбница* (2) и (7).

Второй подход. Применен *Лойцянским Л.Г.* в /1/ . Считается, что объем τ является *фиксированной областью* сплошной среды, т.е. не является функцией времени $\tau' = \tau = const$. *Парадокс* здесь состоит в том, что область интегрирования τ должен быть суммой *индивидуальных* объемов $\delta\tau = \delta\tau(t)$, зависящих от времени в силу (4) $\tau = \iiint_{\tau} \delta\tau = const$.

Отношение приращений во втором подходе будет такое

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \Phi\delta\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{ \iiint_{\tau} \Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t) -$$

$$-\iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t)\delta\tau(t) \ \Big\}, \qquad (10)$$

где область интегрирования не изменяется во времени в силу $\tau' = \tau = const$. Из (10) после аналогичных преобразований получается в пределе

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \Phi\delta\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{ \iiint_{\tau} \Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t) -$$

$$-\iiint_{\tau} \Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t) \ \} = \iiint_{\tau} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t),$$

$$z(t+\Delta t), t+\Delta t)\delta\tau(t+\Delta t) - \Phi(x,y,z,t)\delta\tau(t)] = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt}(\Phi\delta\tau)$$

В результате для фиксированного объема $\tau' = \tau = const$ получается формула

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \Phi\delta\tau = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt}(\Phi\delta\tau), \qquad (11)$$

т.е. дифференцирование можно внести под знак интеграла.

Таким образом, в зависимости от подхода к вычислению полной производной по времени получаются 5 различных выражений: (1), (2), (7), (9), (11).

Дело в том, что в /1/, /2/,/3/,/4/, /5/ и т.п. для раскрытия выражений типа $\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \Phi\delta\tau$ применяются формулы (3) или (11), что в этих учебниках составляет основу **дедуктивного метода** вывода дифференциальных уравнений динамики, баланса энергий, уравнения неразрывности и др.

Именно дедуктивным методом получено *известное* дифференциальное соотношение для моментов

$$[\vec{r}, \rho\frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho\vec{F}] - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0,$$

из которого выводится *ошибочное* положение о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды.

В индуктивном методе производные типа $\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \Phi\delta\tau$ не применяются и доказывается неравенство нулю:

$$[\vec{r}, \rho\frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho\vec{F}] - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{r}, \vec{\pi}_j] \neq 0,$$

тем самым обосновывается положение о *несимметричности* тензора напряжений сплошной среды.

§2.Парадоксы деформационного движения элементарного объема сплошной среды

Как известно, в механике сплошной среды фигурирует симметрический тензор скоростей деформаций $\dot{S}$ /1/,/2/,/3/,/4. Целью параграфа является доказательство того, что несимметрический тензор перемещения $\overline{S}$ обладает такими же свойствами.

В теории деформационного движения элементарного объема и с целью установления реологических законов динамики вязкой сплошной среды широко используется ряд Тейлора

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\delta z \ ,$$

в фиксированный момент времени t . (Собственно говоря, вся теоретическая механика использует ряд *Тейлора* как принцип *виртуальных перемещений* точки)

Ряд *Тейлора* в матрично-векторной форме имеет вид

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\overline{S}\delta\vec{r} \ , \qquad (1)$$

где стоит матрица, именуемая в дальнейшем *тензором перемещения*:

$$\overline{S}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix},\delta\vec{r}=\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix}$$

Обозначая элементы этой матрицы

$$\overline{S}_{xx}=\partial u/\partial x,\overline{S}_{yx}=\partial u/\partial y,\overline{S}_{zx}=\partial u/\partial z,\overline{S}_{yy}=\partial v/\partial y,\overline{S}_{xy}=\partial v/\partial x,$$

$$\overline{S}_{zz}=\partial w/\partial z,\overline{S}_{yz}=\partial w/\partial y,\overline{S}_{xz}=\partial w/\partial x,\overline{S}_{zy}=\partial v/\partial z,$$

можно записать тензор перемещения, по аналогии с известным в гидромеханике *тензором скоростей деформаций* $\dot{S}$,в виде:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{xx}\bar{S}_{yx}\bar{S}_{zx} \\ \bar{S}_{xy}\bar{S}_{yy}\bar{S}_{zy} \\ \bar{S}_{xz}\bar{S}_{yz}\bar{S}_{zz} \end{pmatrix}$$

Следуя /1/, введем три скорости $\dot{e}_x, \dot{e}_y, \dot{e}_z$ относительного удлинения жидких элементарных векторов $\delta\vec{r}_1(\delta x, 0, 0)$, $\delta\vec{r}_2(0, \delta y, 0), \delta\vec{r}_3(0, 0, \delta z)$, расположенных вдоль осей прямоугольной системы координат с началом в некоторой точке M:

$$\dot{e}_x = \frac{1}{\delta x}\frac{d}{dt}(\delta x), \dot{e}_y = \frac{1}{\delta y}\frac{d}{dt}(\delta y), \dot{e}_z = \frac{1}{\delta z}\frac{d}{dt}(\delta z) \qquad (2)$$

и три скорости скошения координатных углов $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ между осями, которые до деформации были равны $\pi/2$. Из скалярных произведений вытекают косинусы этих углов

$$\cos\gamma_{xy} = (\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2)/(\delta x\delta y), \cos\gamma_{yz} = (\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3)/(\delta z\delta y),$$
$$\cos\gamma_{zx} = (\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1)/(\delta x\delta z) \qquad (3)$$

Производные по времени от этих углов обозначаются

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = -\partial\gamma_{xy}/\partial t, \dot{\varepsilon}_{yz} = -\partial\gamma_{yz}/\partial t, \dot{\varepsilon}_{zx} = -\partial\gamma_{zx}/\partial t$$

В основу определения кинематического смысла компонент тензора перемещения $\bar{S}$ полагается соотношение

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \delta\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \delta\vec{v}, \qquad (4)$$

которое вытекает из равенств:

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 - \vec{r}) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}_1) - \vec{v}(\vec{r}) = \delta\vec{v}$$

Имея в виду $\vec{r}_1 = \vec{r} + \delta\vec{r}$, формула (1) представляется в виде

$$\delta\vec{v} = \bar{S}\delta\vec{r} \qquad (5)$$

После подстановки (4) в (5) получается равенство

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \bar{S}\delta\vec{r} \qquad (6)$$

Полагая в нем $\delta\vec{r}$ последовательно равным $\delta\vec{r}_1(\delta x,0,0),\delta\vec{r}_2(0,\delta y,0),\delta\vec{r}_3(0,0,\delta z)$ и проектируя на три оси координат, найдем

$$\frac{d}{dt}(\delta x)=\bar{S}_{xx}\delta x\ ,\ \frac{d}{dt}(\delta y)=\bar{S}_{yy}\delta y\ ,\ \frac{d}{dt}(\delta z)=\bar{S}_{zz}\delta z\,,$$

что согласно (2) дает связь

$$\bar{S}_{xx}=\dot{e}_x,\bar{S}_{yy}=\dot{e}_y,\bar{S}_{zz}=\dot{e}_z,\ \dot{e}_x=\partial u/\partial x,\dot{e}_y=\partial v/\partial y,\dot{e}_z=\partial w/\partial z\,,\quad (7)$$

откуда вытекают равенства диагональных компонент тензора перемещения $\bar{S}$ соответственно скоростям относительных удлинений элементарных отрезков, расположенных вдоль осей координат и имеющих начало в данной точке потока.

Вычислим производные по t от обеих частей равенств (3):

$$\begin{aligned}
-\sin\gamma_{xy}\frac{d\gamma_{xy}}{dt}&=\frac{1}{\delta x\delta y}\frac{d(\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2)}{dt}+(\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\delta x\delta y}\right),\\
-\sin\gamma_{yz}\frac{d\gamma_{yz}}{dt}&=\frac{1}{\delta z\delta y}\frac{d(\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3)}{dt}+(\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\delta z\delta y}\right),\\
-\sin\gamma_{zx}\frac{d\gamma_{zx}}{dt}&=\frac{1}{\delta x\delta z}\frac{d(\delta\vec{r}_3,\delta\vec{r}_1)}{dt}+(\delta\vec{r}_3,\delta\vec{r}_1)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\delta x\delta z}\right)
\end{aligned}\quad (8)$$

Эти равенства в /1/ применяются в момент времени $t=t_0$, соответствующий начальному *недеформированному* состоянию элементарного объема, когда

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=\frac{\pi}{2},(\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2)=0,(\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3)=0,(\delta\vec{r}_3,\delta\vec{r}_1)=0$$

Будем иметь из (8), ибо синусы прямых углов равны 1:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{xy}&=-\partial\gamma_{xy}/\partial t=\frac{1}{\delta x\delta y}\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2),\\
\dot{\varepsilon}_{yz}&=-\partial\gamma_{yz}/\partial t=\frac{1}{\delta y\delta z}\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3),\\
\dot{\varepsilon}_{zx}&=-\partial\gamma_{zx}/\partial t=\frac{1}{\delta z\delta x}\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_3,\delta\vec{r}_1)
\end{aligned}\quad (9)$$

Используя (6) и правила вычисления тройных скалярно-векторных произведений и произведений матрицы на вектор, имеем

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec r_1,\delta\vec r_2)=\frac{d}{dt}(\delta\vec r_1)\delta\vec r_2+\delta\vec r_1\frac{d}{dt}(\delta\vec r_2)=((\bar S\delta\vec r_1),\delta\vec r_2)+(\delta\vec r_1,(\bar S\delta\vec r_2))=$$

$$=(\bar S\delta\vec r_1)_y\,\delta y+\delta x(\bar S\delta\vec r_2)_x=\bar S_{xy}\delta x\delta y+\bar S_{yx}\delta y\delta x=(\bar S_{xy}+\bar S_{yx})\delta x\delta y,$$

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec r_2,\delta\vec r_3)=(\bar S_{yz}+\bar S_{zy})\delta z\delta y,\ \frac{d}{dt}(\delta\vec r_3,\delta\vec r_1)=(\bar S_{xz}+\bar S_{zx})\delta z\delta x,$$

откуда следуют в силу (9) равенства

$$\dot\varepsilon_{xy}=\bar S_{xy}+\bar S_{yx},\dot\varepsilon_{yz}=\bar S_{zy}+\bar S_{yz},\dot\varepsilon_{zx}=\bar S_{xz}+\bar S_{zx}\qquad(10)$$

В /1/, /2/,/3/ и др., сообразуясь с формулой первой теоремы *Гельмгольца,* вводится тензор скоростей деформаций

$$\dot S=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac12(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac12(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})\\ \frac12(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac12(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})\\ \frac12(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac12(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}\qquad(11)$$

Наряду с этим вводится антисимметричный тензор

$$\hat S=\begin{pmatrix}0 & \frac12(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac12(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\\ \frac12(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac12(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y})\\ \frac12(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac12(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}) & 0\end{pmatrix}$$

В сумме имеет место равенство $\bar S=\dot S+\hat S$.

Используя иное представление (первая теорема *Гельмгольца*)

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec r)=\vec\omega x\delta\vec r+\dot S\delta\vec r\,,\ \ \vec\omega=\frac12 rot\vec v$$

в /1/ получены соотношения, аналогичные (7) и (10):

$$\dot S_{xx}=\dot e_x,\dot S_{yy}=\dot e_y,\dot S_{zz}=\dot e_z,\dot e_x=\partial u/\partial x,\dot e_y=\partial v/\partial y,\dot e_z=\partial w/\partial z,$$

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2)=(\dot{S}_{xy}+\dot{S}_{yx})\delta x\delta y,\ \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3)=(\dot{S}_{yz}+\dot{S}_{yz})\delta z\delta y,$$

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_3,\delta\vec{r}_1)=(\dot{S}_{zx}+\dot{S}_{xz})\delta z\delta x, \tag{12}$$

В силу симметричности тензора скоростей деформаций имеют место равенства

$$\dot{S}_{xy}=\dot{S}_{yx}=\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{xy},\quad \dot{S}_{yz}=\dot{S}_{zy}=\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{yz},\quad \dot{S}_{zx}=\dot{S}_{xz}=\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zx} \tag{13}$$

Парадоксально то, что как из (13) так и из (10) вытекают одинаковые равенства

$$\dot{\varepsilon}_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},\dot{\varepsilon}_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\dot{\varepsilon}_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

несмотря на разительное отличие друг от друга тензоров $\dot{S}$ и $\overline{S}$!

Рассмотрим скорость относительного объемного расширения среды в данной ее точке

$$\dot{\theta}=\frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau),$$

$\delta\tau$ - элементарный «жидкий» объем среды, определяемый тройным скалярно-векторным произведением элементарных координатных векторов

$$\delta\vec{r}_1(\delta x,0,0),\delta\vec{r}_2(0,\delta y,0),\delta\vec{r}_3(0,0,\delta z):\quad \delta\tau=(\delta\vec{r}_1,[\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3])$$

Вычисляя индивидуальную производную по времени, имеем

$$\dot{\theta}=\frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau)=\frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1,[\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3])=$$

$$=\frac{1}{\delta\tau}(\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1),[\delta\vec{r}_2,\delta\vec{r}_3])+\frac{1}{\delta\tau}(\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2),[\delta\vec{r}_3,\delta\vec{r}_1])+$$

$$+\frac{1}{\delta\tau}(\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_3),[\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2])$$

Для элементарного параллелепипеда $\delta\tau=\delta x\ \delta y\ \delta z$ и по известному свойству единичных векторов осей координат $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, а также в силу представлений

$$\delta\vec{r}_1 = \delta x\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ \delta\vec{r}_2 = 0\vec{i} + \delta y\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ \delta\vec{r}_3 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \delta z\vec{k}$$

получается

$$\frac{[\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3]}{\delta\tau} = \frac{1}{\delta x}\left[\frac{\delta\vec{r}_2}{\delta y}, \frac{\delta\vec{r}_3}{\delta z}\right] = \frac{1}{\delta x}[\vec{j}, \vec{k}] = \frac{\vec{i}}{\delta x},$$

$$\frac{[\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1]}{\delta\tau} = \frac{\vec{j}}{\delta y}, \frac{[\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2]}{\delta\tau} = \frac{\vec{k}}{\delta z},$$

в силу чего предыдущее равенство перейдет в следующее

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau) =$$

$$= \frac{1}{\delta x}\left(\vec{i}, \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1)\right) + \frac{1}{\delta y}\left(\vec{j}, \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2)\right) + \frac{1}{\delta z}\left(\vec{k}, \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_3)\right)$$

Используя вновь равенство (6), согласно которому

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1) = \bar{S}\delta\vec{r}_1\ ,\ \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2) = \bar{S}\delta\vec{r}_2\ ,\ \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_3) = \bar{S}\delta\vec{r}_3\ ,$$

определим искомое выражение $\dot{\theta}$ в форме

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau) = \frac{1}{\delta x}(\vec{i}, \bar{S}\delta\vec{r}_1) + \frac{1}{\delta y}(\vec{j}, \bar{S}\delta\vec{r}_2) + \frac{1}{\delta z}(\vec{k}, \bar{S}\delta\vec{r}_3)\ ,$$

где скалярные произведения равны

$$\frac{1}{\delta x}(\vec{i}, \bar{S}\delta\vec{r}_1) = \bar{S}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\delta y}(\vec{j}, \bar{S}\delta\vec{r}_2) = \bar{S}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{1}{\delta z}(\vec{k}, \bar{S}\delta\vec{r}_3) = \bar{S}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Окончательно находим

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau) = \bar{S}_{xx} + \bar{S}_{yy} + \bar{S}_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\,\vec{v}\ , \qquad (14)$$

т.е. скорость относительного объемного расширения элементарного объема среды в данной ее точке равна дивергенции вектора скорости в этой точке или сумме скоростей относительных удлинений

$$\dot{\theta} = \dot{e}_x + \dot{e}_y + \dot{e}_z$$

Таким образом, с применением тензора перемещения $\overline{S}$ установлена использованная выше формула (4) **§1** . Она непосредственно вытекает из (14):

$$\frac{1}{\delta\tau}\frac{d(\delta\tau)}{dt} = div\vec{v} \qquad (15)$$

или в эйлеровых переменных

$$\frac{\partial(\delta\tau)}{\partial t} + u\frac{\partial(\delta\tau)}{\partial x} + v\frac{\partial(\delta\tau)}{\partial y} + w\frac{\partial(\delta\tau)}{\partial z} = \delta\tau div\vec{v}$$

и выражает быстроту изменения элементарного объема среды во времени при заданном ее движении.

§3. Парадоксы интегрального вывода уравнений динамики сплошной среды

В /1/, /2/, /3/, /4/ применяется интегрирование по объему τ , таким образом, уравнения динамики сплошной среды выводятся **дедуктивным методом**. Именно применение дедуктивного метода привело к ложному положению о симметричности тензора напряжений. Отправным пунктом является закон изменения импульса (или количества движений) для системы точек с массами m_i и скоростями $\vec{v}_i$:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i \, , \qquad (1)$$

где $\vec{p}_i = (\vec{v}_i m_i)$ - импульс (количество движения) частицы с массой m_i, движущейся под действием результирующих сил $\vec{f}_i$, в которые входят все силы, действующие на частицу с номером i, как внешние так и внутренние силы взаимодействия частиц между собой. При суммировании эти внутренние силы по третьему закону *Ньютона* сокращаются попарно (см. /7/).

В дедуктивном методе закон (1) применяется к произвольному объему τ с поверхностью σ, внешняя нормаль к которой обозначена $\vec{n}$. Закон изменения импульса записывается для произвольного объема τ в виде:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\vec{v}\rho\delta\tau=\iiint_{\tau}\vec{F}\rho\delta\tau+\oiint_{\sigma}\vec{\pi}_n\delta\sigma \qquad (2)$$

В /1/ преобразование левой части (2) осуществляется по формуле (11) **§1**:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\vec{v}\rho\delta\tau=\iiint_{\tau}\frac{d}{dt}(\vec{v}\rho\delta\tau),$$

а в /2/ применяется формула *Лейбница*. Очевидно, в интегральном выводе уравнений динамики сплошной среды возникают проблемы с вычислениями $\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\vec{v}\rho\delta\tau$ или производной от моментов $\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}[\vec{r},\vec{v}\rho]\delta\tau$ и т.п., на что было указано в виде 5 формул в **§1.** Удачные применения формул *Лейбница* или (11) **§1** связаны с тем, что уравнения динамики сплошной среды должны были соответствовать теореме об изменении импульса или 2 закону *Ньютона.*

Первое, что обращает внимание, в поверхностном интеграле в (2) учтены только силы, действующие на частицы, расположенные на поверхности σ объема τ, т.е. *не учтены внутренние напряжения* $\oiint_{\sigma_{\delta\tau}}\vec{\pi}_n\delta\sigma$, *действующие на частицы поверхности* $\sigma_{\delta\tau}$ *индивидуального объема* $\delta\tau$, *содержащего массу* $\sum_i m_i=\delta m=\rho\delta\tau$ *совокупности частиц,* С учетом этих сил интегральное выражение должно иметь исходный вид

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} \vec{v}\rho\delta\tau = \iiint_{\tau} \vec{F}\rho\delta\tau + \iiint_{\tau} \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma \qquad (2a)$$

Далее, объем $\delta\tau_A$ *действует* на другой объем $\delta\tau_B$ с силой $\vec{f}_A = \oiint_{\sigma_{\delta\tau_A}} \vec{\pi}_n \delta\sigma$ и, наоборот, объем $\delta\tau_B$ *действует с силой* $\vec{f}_B = \oiint_{\sigma_{\delta\tau_B}} \vec{\pi}_n \delta\sigma$ на объем $\delta\tau_A$*, то* по 3 закону *Ньютона* имеет место равенство $\vec{f}_A = -\vec{f}_B$. В результате сокращения этих сил при суммировании имеет место равенство

$$\iiint_{\tau} \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma = \oiint_{\sigma} \vec{\pi}_n \delta\sigma, \qquad (*)$$

т.е. такое должно быть обоснование (2). Из правильно составленного выражения (2а), если применить к левой части формулу *Лейбница* или формулу (11) **§1**, выводится уравнение динамики сплошной среды в напряжениях, то есть нет необходимости перехода к формуле (2).

В теореме об изменении момента количеств движений

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v}\rho\delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F}\rho\delta\tau] + \oiint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta\sigma] \qquad (3)$$

которая применена в /1/ к объему τ аналогично (2), равенство типа (*) не имеет места. Согласно приведенным выше рассуждениям правильно составленная теорема об изменении момента количеств движений (импульса) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v}\rho\delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F}\rho\delta\tau] + \iiint_{\tau} [\vec{r}, \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma] \qquad (3a)$$

Из (3) выводится равенство, используемое в /1/ и др.,

$$[\vec{r}, \rho\frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho\vec{F}] - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0$$

со всеми вытекающими отсюда противоречиями о с*имметричности тензора напряжений* сплошной среды. Из правильно составленного выражения (3а) получается соотношение

$$[\vec{r},\rho\frac{d\vec{v}}{dt}]-[\vec{r},\rho\vec{F}]-[\vec{r},\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{\pi}_j}{\partial x_j}]=0,$$

из которого следует уравнение динамики в напряжениях

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{F}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{\pi}_j}{\partial x_j},$$

следовательно, не возникает вопрос о *симметричности* тензора напряжений, что имело место в неправильной формулировке (3).

Другой *парадокс* состоит в том, что для вывода фундаментальных уравнений механики сплошной среды нет никакой необходимости в интегральных формулах типа (2), (3). Покажем это.

Пусть масса индивидуального объема $\delta\tau$ равна $\delta m=\rho\delta\tau$, $\vec{F}$ - плотность массовых сил, $\vec{\pi}_n$ - напряжение, $\rho-$ плотность.

Теорему об изменении импульса нужно сформулировать непосредственно для объема $\delta\tau$, имея в виду, что главная поверхностная сила, действующая на поверхность $\sigma_{\delta\tau}$ объема $\delta\tau$ равна $\oiint\limits_{\sigma_{\delta\tau}}\vec{\pi}_n\delta\sigma$, главная массовая сила, действующая на объем $\delta\tau$, равна $\vec{F}\delta m$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\,\delta m)=\vec{F}\delta m+\oiint\limits_{\sigma_{\delta\tau}}\vec{\pi}_n\delta\sigma \qquad (4)$$

Далее, по теореме *Остроградского-Гаусса* осуществляется переход к объемному интегралу

$$\oiint\limits_{\sigma_{\delta\tau}}\vec{\pi}_n\delta\sigma=\iiint\limits_{\delta\tau}(\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z})\delta\tau', \quad \delta\tau=\iiint\limits_{\delta\tau}\delta\tau'$$

По теореме о среднем значении определенного интеграла и малости индивидуального объема $\delta\tau$ получается

$$\iiint\limits_{\delta\tau}\left(\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}\right)\delta\tau'=\left(\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}\right)\iiint\limits_{\delta\tau}\delta\tau'=$$

$$=\left(\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}\right)\delta\tau\ ,$$

следовательно, имеет место равенство

$$\oiint\limits_{\sigma_{\delta\tau}}\vec{\pi}_n\,\delta\sigma=\left(\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}\right)\delta\tau \qquad (5)$$

Подставляя (5) и $\delta m=\rho\delta\tau$ в (4), находим

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\rho\delta\tau)=\vec{F}\rho\delta\tau+\left(\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}\right)\delta\tau \qquad (6)$$

Левая часть (6) преобразовывается на основании формулы (4) **§1** и уравнения неразрывности $d\rho/dt+\rho div\vec{v}=0$:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\delta\tau+\rho\vec{v}\,\delta\tau div\vec{v}+\vec{v}\,\delta\tau\,\frac{d\rho}{dt}=$$

$$=\vec{F}\rho\delta\tau+\left(\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}\right)\delta\tau\ ,$$

откуда после сокращений $\delta\tau$ получается классическое уравнение динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{F}+\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}$$

§4. Индуктивный метод

Индуктивный метод (от частного к общему) свободен от указанных выше недостатков, потому как используется понятие *частицы* сплошной среды. «Жидкий » индивидуальный объем $\delta\tau$ составлен именно из этих частиц с массами m_i и скоростями $\vec{v}_i$. (Если бы с самого начала развития механики сплошных сред применялся индуктивный метод, то проблемы симметричности тензора напряжений не было бы! В связи с чем здесь достаточно подробно излагается этот физичный метод.)

Предполагается в силу сплошности среды, что в $\delta\tau$ содержится сумма частиц $\sum\limits_i m_i = \delta m$, среднемассовая скорость $\vec{v}$ объема $\delta\tau$ определяется как отношения /2/ $\vec{v} = \sum\limits_i m_i \vec{v}_i / \sum\limits_i m_i = \sum\limits_i m_i \vec{v}_i / \delta m$, аналогично определяется среднемассовая сила, действующая на $\delta\tau$, как $\vec{F} = \sum\limits_i m_i \vec{F}_i / \sum\limits_i m_i = \sum\limits_i m_i \vec{F}_i / \delta m$, откуда $\vec{v}\delta m = \sum\limits_i m_i \vec{v}_i$, $\vec{F}\delta m = \sum\limits_i m_i \vec{F}_i$, $\rho -$ плотность $\rho = \delta m / \delta\tau$, $\delta m = \rho\delta\tau = \sum\limits_i m_i$.

Т*еорема* об изменении импульса системы материальных точек применяется к **элементарному объему** сплошной среды $\delta\tau$**,** в которой находится совокупность частиц $\sum\limits_i m_i$, а не к конечному объему $\tau = \iiint\limits_\tau \delta\tau$, собственно говоря, в этом заключается вся суть **индуктивного** метода:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i m_i + \oint\!\!\!\oint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \vec{\pi}_{nk} \sigma_k \,, \qquad (1)$$

где $\vec{\pi}_n \delta\sigma = \sum\limits_k \vec{\pi}_{nk} \sigma_k$ - результирующая поверхностная сила, действующая на элементарную поверхность $\delta\sigma = \sum\limits_k \sigma_k$, причем $\delta\sigma \in \sigma_{\delta\tau}$, $\sigma_k -$ участок поверхности $\delta\sigma$, которую занимает частица $m_{\sigma k}$, находящаяся под действием напряжения $\vec{\pi}_{nk}$, $\sigma_{\delta\tau} = \oint\!\!\!\oint\limits_{\sigma_{\delta\tau}} \delta\sigma$.

Формула (1) в эквивалентной записи принимает уже использованный выше вид

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\delta m) = \vec{F}\delta m + \oiint\limits_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma \ , \qquad (2)$$

откуда получается, как было показано, уравнение динамики сплошной среды в напряжениях.

Можно поступить проще, не применяя теорему о среднем интеграла, а пользуясь предельным переходом $\delta\tau = \delta x\delta y\delta z \to 0$, если в качестве элементарного объема $\delta\tau = \delta x\delta y\delta z$ взять параллелепипед с гранями $\delta x = x_2 - x_1, \delta y = y_2 - y_1, \delta z = z_2 - z_1$. Закон изменения импульса для параллелепипеда с суммой частиц $\sum\limits_i m_i = \delta m = \rho\delta\tau$ записывается с учетом массовых и поверхностных сил, действующих на $\delta\tau$.

В результате в приложении к параллелепипеду теорема об изменении импульса примет вид, который аналогичен (2):

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\delta m) = \vec{F}\delta m + (\vec{\pi}_{x_2} + \vec{\pi}_{-x1})\delta y\delta z + \qquad (3)$$

$$+ (\vec{\pi}_{y2} + \vec{\pi}_{-y1})\delta x\delta z + (\vec{\pi}_{z2} + \vec{\pi}_{-z1})\delta x\delta y \ ,$$

где $\quad \vec{v}\delta m = \sum\limits_i m_i \vec{v}_i \ , \ \vec{F}\delta m = \sum\limits_i m_i \vec{F}_i \ , \ \vec{\pi}_n \delta\sigma = \sum\limits_k \vec{\pi}_{nk}\sigma_k \ .$

Сравнение (3) с (2) показывает, что поверхностный интеграл для параллелепипеда вычисляется по его граням

$$\sigma_{\delta\tau} = (\delta y\delta z)_1 \bigcup (\delta y\delta z)_2 \bigcup (\delta x\delta z)_1 \bigcup (\delta x\delta z)_2 \bigcup (\delta x\delta y)_1 \bigcup (\delta x\delta z)_2$$

В результате получается следующее значение интеграла

$$\oiint\limits_{\sigma_{\delta\tau}} \sum\limits_k \vec{\pi}_{nk}\sigma_k \quad = (\vec{\pi}_{x_2} + \vec{\pi}_{-x1})\delta y\delta z + (\vec{\pi}_{y2} + \vec{\pi}_{-y1})\delta x\delta z +$$

$$+ (\vec{\pi}_{z2} + \vec{\pi}_{-z1})\delta x\delta y$$

Используя формулу $\dfrac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \, div\vec{v}$ и равенство напряжений

$$\vec{\pi}_{-x1} = -\vec{\pi}_{x1}, \vec{\pi}_{-y1} = -\vec{\pi}_{y1}, \vec{\pi}_{-z1} = -\vec{\pi}_{z1}, \qquad (4)$$

поделив на объем $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z,$, приходим к выражению

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} \right) = \rho\vec{F} + \left(\vec{\pi}_{x2} - \vec{\pi}_{x1}\right) / \delta x +$$

$$+\left(\vec{\pi}_{y2} - \vec{\pi}_{y1} \right) / \delta y + \left(\vec{\pi}_{z2} - \vec{\pi}_{z1}\right) / \delta z \qquad (5)$$

Очевидно, предельный переход в (5) $\delta x \to 0, \delta y \to 0, \ \delta z \to 0,$ дает уравнение динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} \right) = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z} \qquad (6)$$

При равенстве нулю уравнения неразрывности (нет источников и стоков)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0$$

данное уравнение (6) точно совпадает с уравнением (10) из **§3** . Здесь не используются теорема *Остроградского-Гаусса* и теорема о среднем интеграла.

Уравнение баланса энергий выводится таким же способом. Для элементарного параллелепипеда $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ сплошной среды закон сохранения энергий формулируется в виде

$$\frac{d}{dt}[(E + |\vec{v}|^2/2)\delta m] = (\vec{F}\delta m, \vec{v}) + [(\vec{\pi}_{x2}, \vec{v}_{(x_2)}) + (\vec{\pi}_{-x1}, \vec{v}_{(x_1)})]\delta y \delta z +$$

$$+[(\vec{\pi}_{y2}, \vec{v}_{(y_2)}) + (\vec{\pi}_{-y1}, \vec{v}_{(y_1)})]\delta z \delta x +$$

$$+[(\vec{\pi}_{z2}, \vec{v}_{(z_2)}) + (\vec{\pi}_{-z1}, \vec{v}_{(z_1)})]\delta x \delta y -$$

$$-\left\{ (q_{(x)2} - q_{(x)1})\delta y \delta z + (q_{(y)2} - q_{(y)1})\delta z \delta x + \right.$$

$$\left. +(q_{(z)2} - q_{(z)1})\delta x \delta y \right\} + Q\delta m \qquad (7)$$

где $\vec{v}_{(x_m)}, m = 1{,}2$ - значения вектора скорости на площадках $\delta y \delta z$ в сечениях x_1, x_2 и т.п., $\vec{q} = q_{(x)}\vec{i} + q_{(y)}\vec{j} + q_{(z)}\vec{k}$ - вектор потока тепла, $(E + |\vec{v}|^2/2)\delta m$ -полная энергия объема $\delta\tau$,

$\left(\vec{F}\delta m, \vec{v}\right)$ - мощность массовой силы, а это выражение

$$[(\vec{\pi}_{x2}, \vec{v}_{(x_2)}) + (\vec{\pi}_{-x1}, \vec{v}_{(x_1)})]\delta y \delta z +$$
$$+[(\vec{\pi}_{y2}, \vec{v}_{(y_2)}) + (\vec{\pi}_{-y1}, \vec{v}_{(y_1)})]\delta z \delta x +$$
$$+[(\vec{\pi}_{z2}, \vec{v}_{(z_2)}) + (\vec{\pi}_{-z1}, \vec{v}_{(z_1)})]\delta x \delta y$$

дает сумму мощностей поверхностных сил, действующих на пары граней $\delta y \delta z, \delta z \delta x, \delta x \delta y$ параллелепипеда, сумма

$$-\left\{ (q_{(x)2} - q_{(x)1})\delta y \delta z + (q_{(y)2} - q_{(y)1})\delta z \delta x + (q_{(z)2} - q_{(z)1})\delta x \delta y \right\}$$

- есть потоки тепла через эти грани, $Q\delta m -$ мощность источника или потребителя энергии в объеме $\delta\tau$.

Поделив обе части (7) на $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ и стягивая параллелепипед $\delta x \to 0, \delta y \to 0, \delta z \to 0$ к точке, приходим к уравнению баланса энергий в сплошной среде:

$$\rho \frac{d}{dt}(E + |\vec{v}|^2 / 2) + (E + |\vec{v}|^2 / 2)(\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v}) = \qquad (8)$$

$$= \rho(\vec{F}, \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{\pi}_x, \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{\pi}_y, \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\pi}_z, \vec{v}) - div\vec{q} + \rho Q,$$

из которого по закону Фурье $\vec{q} = -\lambda gradT$ и $dE = c_v dT$, получается уравнение притока тепла для *несимметричного* тензора напряжений *Ньютона* /8/ в виде

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = div\left(\lambda gradT\right) + \mu \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2 - p div\vec{v} - (\frac{1}{3}\mu - \mu')\left(div\vec{v}\right)^2$$

(Энергия тепла, проходящая через площадку $\delta\sigma$ в единицу времени, равна $(\vec{q}, \vec{n})\delta\sigma$). Изложенный выше индуктивный подход обладает прямой связью с основными законами физики. Следует отметить, что уравнение неразрывности (6) выведено в /1/ из закона сохранения материи *индуктивным* методом. По закону сохранения материи масса $\delta m = \rho \delta\tau$ индивидуального объема $\delta\tau$ есть величина постоянная δm =*const*, поэтому

$$\frac{d\delta m}{dt}=0,\frac{d(\rho\delta\tau)}{dt}=0,\rho\frac{d(\delta\tau)}{dt}+\delta\tau\frac{d\rho}{dt}=0 \qquad (9)$$

В силу $\dfrac{d\delta\tau}{dt}=\delta\tau\cdot div\vec{v}$ из (9) вытекает выражение

$$\rho\delta\tau div\vec{v}+\delta\tau\frac{d\rho}{dt}=0,$$

откуда, сокращая $\delta\tau$, приходим к уравнению неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho div\vec{v}=0$$

Целью вышеизложенных двух параграфов было обоснование того, что для вывода основных уравнений можно не применять *дедуктивный* метод.

Как это показано в **§3**, при выводе ложной симметричности тензора напряжений сплошной среды традиционно используется *дедуктивный метод.*

§5. Парадоксы первой теоремы *Гельмгольца*

Известно /1/, что *Гельмгольц,* исключив давление *p* из уравнений *Навье-Стокса* несжимаемой жидкости /1/, получил уравнение для ротора скорости

$$rot\vec{v}=(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\vec{k}$$

Имея в виду, что размерность $rot\vec{v}$ совпадает с размерностью угловой скорости $\vec{\omega}$, *Гельмгольц* попытался связать их с помощью *формулы скорости для точек твердого тела* /1/:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+[\ \vec{\omega},(\vec{r}-\vec{r}_0)\ ], \qquad (1)$$

где $\vec{v}_0$, $\vec{r}_0$ скорость и радиус-вектор полюса, относительно которого в данный момент происходит мгновенное вращение тела. Попытка выразить компоненты угловой скорости $\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$ через компоненты линейной скорости

$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ привела *Гельмгольца* к решению относительно $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ линейной алгебраической системы

$$u = u_0 + \omega_y (z - z_0) - \omega_z (y - y_0),$$

$$v = v_0 + \omega_z (x - x_0) - \omega_x (z - z_0), \qquad (2)$$

$$w = w_0 + \omega_x (y - y_0) - \omega_y (x - x_0),$$

определитель которой равен нулю, поэтому данная система при заданных

$$\delta u = u - u_0, \delta v = v - v_0, \delta w = w - w_0,$$

$$\delta x = x - x_0, \delta y = y - y_0, \delta z = z - z_0$$

имеет бесчисленное множество решений, что в первую очередь следует из равенства

$$|\ \vec{v} - \vec{v}_0\ | = |\ [\ \vec{\omega}, (\vec{r} - \vec{r}_0)\ ]\ | = |\vec{\omega}||\vec{r} - \vec{r}_0|\sin\alpha;$$

совместность системы вытекает из условия ортогональности $\vec{v} - \vec{v}_0$ к $\vec{r} - \vec{r}_0$: $(\vec{v}, \vec{r} - \vec{r}_0)$=0. В самом деле, если в качестве исходной произвольной переменной выбрать ω_x, то множество решений системы (2) записывается в виде

$$\omega_z = \frac{\delta v}{\delta x} + \omega_x \frac{\delta z}{\delta x}, \omega_y = \omega_x \frac{\delta y}{\delta x} - \frac{\delta w}{\delta x} \qquad (3)$$

Гельмгольц (или *Лойцянский* в /1/?) поступают совершенно по иному. Дифференцируется (2) по *x,y,z,* полагая постоянными $\vec{v}_0, \vec{r}_0$, $\vec{\omega}$, в результате для компонент угловой скорости *твердого тела* были получены выражения:

$$\omega_x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z}, \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

Парадоксально, что применение метода (4) *Гельмгольца* (или *Лойцянского*?) к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,..., N$$

дает значения искомых величин в форме

$x_j = \dfrac{\partial b_i}{\partial a_{ij}}, j = 1,..., N$, $i = 1,..., N$, т.е. получаются ***N*N***

значений искомых неизвестных $\boldsymbol{x_j}$ вместо положенных ***N.*** Очевидно, из них можно образовать любые комбинации типа

$$x_j = \sum_m (\alpha_m \frac{\partial b_m}{\partial a_{mj}}) \Big/ \sum_m \alpha_m , j = 1,..., N,$$

где α_m - произвольные числа. В данном случае системы (4) этим фактом можно воспользоваться следующим образом.

Умножив верхнюю строчку на *n* - нижнюю строчку на *m*, сложив и поделив их на $m+n \neq 0$, найдем значения

$$\omega_x = \frac{m}{m+n}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{n}{m+n}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\omega_y = \frac{m}{m+n}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{n}{m+n}\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\omega_z = \frac{m}{m+n}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{n}{m+n}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Гельмгольц (*Лойцянский?*) из этого бесчисленного многообразия компонент угловой скорости использовал только одну совокупность, получающуюся из (5) при $m=n=1$:

$$(rot\vec{v})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x, \ (rot\vec{v})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\omega_y,$$

$$(rot\vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z, \tag{6}$$

где использовано известное выражение ротора скорости. Очевидно, ни при каких значениях m, n выражения (5)

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ***не совпадают*** с решениями (3) системы (2) . Если даже взять в качестве значения свободной переменной

$$\omega_x = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}),$$

подставляя его в найденные решения (3) системы (2)

$$\omega_z = \frac{\delta v}{\delta x} + \omega_x \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\frac{\delta z}{\delta x} \neq \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}),$$

$$\omega_y = \omega_x \frac{\delta y}{\delta x} - \frac{\delta w}{\delta x} = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\frac{\delta y}{\delta x} - \frac{\delta w}{\delta x} \neq \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})$$

убеждаемся в том, что формулы ***Гельмгольца*** (6) ***) не являются решениями системы*** (2), ч.т.д. ***Парадоксальный факт,*** используя неправильное решение (6) *Гельмгольц* (*Лойцянский*?) вместо формулы (1) обращается к выражению

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\frac{1}{2} rot\vec{v}, (\vec{r} - \vec{r}_0)\ ], \qquad (7)$$

которое ничего общего с формулой скорости твердого тела (1) не имеет, потому что (6) не является решением системы (2).

В силу того, что формулы *Гельмгольца* (6) не являются решениями системы (2) данное выражение вовсе не эквивалентно формуле (1) скорости точки твердого тела! (Эта формула вообще ошибочна, она не годится для расчета скорости точек твердого тела.) Тем ни менее, данное выражение стало в дальнейшем прообразом первой теоремы *Гельмгольца,* на которой остановимся более подробно.

Первая теорема *Гельмгольца* выводится из приближенной формулы, представляющей члены с первыми производными ряда *Тейлора* в виде

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \overline{S}\delta\vec{r} \qquad (8)$$

Гельмгольц по аналогии с неправильным выражением (7) преобразовал (8) к эквивалентному виду (см./1/):

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2}[\ rot\vec{v}, \delta\vec{r}\ ] + \dot{S}\delta\vec{r}\ , \qquad (9)$$

введя тензор скоростей деформаций $\dot{S}$. Формула (9) является содержанием первой теоремы *Гельмгольца*. Сравнивая (9) с ошибочным выражением (7), *Гельмгольц* объявляет $\dot{S}\,\delta\vec{r}$ ***деформационным смещением.*** Если иметь в виду, что выражение $\vec{v} = \vec{v}_0 + [\frac{1}{2} rot\vec{v}, (\vec{r} - \vec{r}_0)\,]$ в отдельности вообще не имеет никакого физического смысла, в отличие от скорости точки твердого тела $\vec{v} = \vec{v}_0 + [\,\vec{\omega}, (\vec{r} - \vec{r}_0)\,]$, то сформулированное понятие деформационного смещения является весьма сомнительным с физической точки зрения.

Более содержательным является ***перемещение*** $\bar{S}\delta\vec{r}$ в (8) и в силу результатов (7), (9), (10) §2 это произведение можно объявить ***деформационным смещением.*** *Покажем, что ряду Тейлора* (8) *можно придать бесконечное число форм, содержащих* $rot\vec{v}$, *тем самым будет доказано, что имеет место бесконечное число «деформационных смещений» типа гельмгольцевских* $\dot{S}\,\delta\vec{r}$. С этой целью запишем ряд *Тейлора* (8) в проекциях на оси координат:

$$u(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = u(x,y,z,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z,$$

$$v(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = v(x,y,z,t) + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z, \qquad (10)$$

$$w(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = w(x,y,z,t) + \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z$$

Эквивалентное преобразование ряда *Тейлора* (10) имеет вид:

$$u(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = u(x,y,z,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x - \frac{b-1}{b}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\delta y +$$

$$+\frac{b-1}{b}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\delta z + (\frac{b-1}{b}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial y})\delta y + (\frac{b-1}{b}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial z})\delta z,$$

$$v(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = v(x,y,z,t) + \frac{b-1}{b}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y +$$

$$-\frac{b-1}{b}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\delta z + (\frac{b-1}{b}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial x})\delta x + (\frac{b-1}{b}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial z})\delta z, \qquad (11)$$

$$w(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = w(x,y,z,t) - \frac{b-1}{b}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\delta x +$$

$$+\frac{b-1}{b}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z + (\frac{b-1}{b}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial x})\delta x + (\frac{b-1}{b}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial y})\delta y,$$

По аналогии с представлением *Гельмгольца* (9) ряд *Тейлора* (11) можно записать в векторном виде:

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r},t) + \frac{b-1}{b}[\ rot\vec{v}, \delta\vec{r}\ ] + S_b\delta\vec{r}\,, \qquad (12)$$

используя очевидное матрично-векторное представление

$$S_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial x}\right), \frac{\partial v}{\partial y}, \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial x}\right), \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

b=const, $b \neq 0, |b| < \infty$. При *b=2* из (12) получается первая теорема *Гельмгольца* (9), ибо $S_2 = \dot{S}$, т.е. тензор S_2 равен тензору скоростей деформаций, при *b=1 универсальная* формула (12) переходит в ряд *Тейлора* в исходной записи (8), т.к. $S_1 = \overline{S}$, т.е. S_1 равен матрице перемещения. Всюду выше ротор скорости имеет компоненты

$$(rot\vec{v})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\ (rot\vec{v})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\ (rot\vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (14)$$

Поэтому разложению в ряд *Тейлора* (10) можно придать другой эквивалентный вид:

$$u(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = u(x,y,z,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x -$$

$$-(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\delta y + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\delta z + \frac{\partial v}{\partial x}\delta y + \frac{\partial w}{\partial x}\delta z,$$

$$v(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = v(x,y,z,t) + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\delta x +$$

$$+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y - (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\delta z + \frac{\partial u}{\partial y}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta z,$$

$$w(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = w(x,y,z,t) - (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\delta x +$$

$$+(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z + \frac{\partial u}{\partial z}\delta x + \frac{\partial v}{\partial z}\delta y \qquad (15)$$

По аналогии с (12) проекции (15) свертываются в выражение

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + [\ rot\vec{v}, \delta\vec{r}\ ] + \delta\vec{r}\,\overline{S}\ , \qquad (16)$$

где $\overline{S}$ несимметричная матрица перемещения из §1, в $\delta\vec{r}\,\overline{S}$ строки умножаются на столбцы. *Гельмгольц* вихрем скорости назвал формулу

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{v}\ , \qquad (17)$$

исходя из ложного представления (7), о чем шла речь выше.

Как известно /1/, /4/, ротор скорости в гидродинамике связан, в первую очередь, с ***циркуляцией скорости***:

$$(rot\vec{v}, \vec{n}) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma} \oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{r})\ , \qquad (18)$$

и компоненты $rot\vec{v}$ в указанном в (14) виде получаются именно из этого определения (18) , поэтому для вихря скорости должна использоваться формула $\vec{\Omega} = rot\vec{v}$. Если исходить из определения *Гельмгольца,* то деформационными смещениями являются $S_b\delta\vec{r}$, входящие в универсальную формулу (12).

§6. Парадоксы гипотезы *Стокса*

1^0. Гипотеза *Стокса* основана на неверной формуле *Гельмгольца* $\vec{v} = \vec{v}_0 + [1/2 rot\vec{v}, (\vec{r} - \vec{r}_0)]$

В §5 приведена эта ошибочная формула *Гельмгольца,* на основании которой разложение в ряд *Тейлора* сформулировано в виде *первой теоремы Гельмгольца /1/:*

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\frac{1}{2}[\ rot\vec{v},\delta\vec{r}\ ]+\dot{S}\delta\vec{r}$$

Далее, *Стокс*, приняв в этом ряду *Тейлора* слагаемое $\dot{S}\delta\vec{r}$ за деформационное смещение, происходящее под действием поверхностных сил, *гипотетически* предположил, что касательные напряжения должны быть пропорциональными ***удвоенным значениям*** компонент тензора скоростей деформаций $\dot{S}$:

$$\pi_{ji(c)}=2\mu\dot{S}_{ji}, i\neq j\ ,$$

благодаря чему, касательные напряжения получились симметричными в силу симметричности матрицы $\dot{S}$. *Стокс пренебрег равноправным членом* ряда *Тейлора* (**в этом главная ошибка этой гипотезы**): $\frac{1}{2}[\ rot\vec{v},\delta\vec{r}\ ]\equiv\hat{S}\delta\vec{r}$.

Свою гипотезу *Стокс* (другое название - обобщенный закон *Ньютона* /1/), оформил для течений вязких жидкостей и газов в тензорном виде

$$\pi_c=-(p+\frac{2}{3}\mu div\vec{v})E+2\mu\dot{S} \qquad (1)$$

В индексных обозначениях компоненты тензора напряжений π_c записываются короче

$$\pi_{ii(c)}=-(p+\frac{2}{3}\mu div\vec{v})+2\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, i=1,2,3,$$

$$\pi_{ji(c)}=\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}), i\neq j\ , \qquad (2)$$

и симметричность тензора напряжений в виде

$$\pi_{ij(c)}=\pi_{ji(c)}, i\neq j, i, j=1,2,3, \qquad (3)$$

Обращает внимание то обстоятельство, что в нормальные напряжения диагональные элементы тензора $\dot{S}$ входят *с* ***удвоенным значением***, что связано с *подгонкой* касательных напряжений (2) под закон трения *Ньютона* $\pi_{ns} = \mu \frac{\partial v_s}{\partial n}$.

Например, закон трения *Ньютона* при $v_s = u, n = y, s = x$ дает формулу $\pi_{yx(н)} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, а по гипотезе *Стокса* (2) получается $\pi_{yx(c)} = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$. Очевидное несовпадение связано со включением парадоксального лишнего члена $\mu \frac{\partial v}{\partial x}$. (Кстати, на необоснованность гипотезы *Стокса* указывал *Л.Д.Ландау*.)

Возникает вопрос об адекватности члена $2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ в нормальном напряжении в том смысле, что выбор коэффициента «2» обоснован только гипотезой *Стокса* (1), по которой должно выполняться искусственно созданное равенство

$$\pi_{ji(c)} = 2\dot{S}_{ji}, i \neq j \qquad (4)$$

В предыдущем параграфе § 5 для ряда *Тейлора*

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \bar{S}\delta\vec{r}$$

было приведено бесчисленное множество эквивалентных формулировок, содержащих ротор скорости:

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{b-1}{b}[\ rot\vec{v}, \delta\vec{r}\ ] + S_b\delta\vec{r} \qquad (5)$$

Если следовать логике гипотезы *Стокса,* то напряжения, выбранные из соображений их пропорциональности компонентам тензора S_b, будут определяться в виде

$$\pi_{xx} = -(p + b/3\mu div\vec{v}) + b\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\pi_{yy} = -(p + b/3\mu div\vec{v}) + b\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\pi_{zz} = -(p + b/3\mu div\vec{v}) + b\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\pi_{yx} = \mu(\frac{b-1}{b}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial y}), \pi_{yz} = \mu(\frac{b-1}{b}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial y}),$$

$$\pi_{xy} = \mu(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial x}), \pi_{xz} = \mu(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial x}),$$

$$\pi_{zx} = \mu(\frac{b-1}{b}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial z}), \pi_{zy} = \mu(\frac{b-1}{b}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial z})$$

Для $b \neq 2$ касательные напряжения *несимметричны*, симметричность имеет место только при ***b=2***, когда $S_2 = \dot{S}$. Очевидно также, что при *b=1* матрица (6) переходит в матрицу перемещения $S_1 = \bar{S}$.

Имеется бесконечное число вязких течений (здесь приводятся лишь некоторые из них), в которых симметричность напряжений *Стокса* (3) противоречит *фундаментальному закону трения Ньютона* $\pi_{ns} = \mu\frac{\partial v_s}{\partial n}$, где $\vec{n}$ поперечное к $\vec{s}$ направление, $v_s = (\vec{v}, \vec{s})$ - проекция скорости на направление орта $\vec{s}$, π_{ns} - касательное напряжение .

2^0. Парадокс гипотезы *Стокса* $S_2 = \dot{S}$ в течениях *Пуазейля* и *Куэтта*

В ламинарном течении между параллельными непроницаемыми и недеформируемыми стенками канала (течение *Пуазейля*), скорости определяются как решение уравнения

$$\frac{dp}{dx} = \mu\frac{d^2u}{dy^2}, \quad u(\pm b) = 0 ,$$

в виде зависимостей

$$u=-\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}(b^2-y^2),(\frac{dp}{dx}=const)\,,\ v\ \ \equiv 0\,,$$

(*здесь* $v_1=u, v_2=v, v_3=w, x_1=x, x_2=y, x_3=z$).

В этом течении продольное касательное напряжение в направлении x по формуле (2) равно $\pi_{yx(c)}=\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})=\frac{dp}{dx}y$. В силу того, что нет течения по поперечному направлению $v\ \equiv 0$, а значит производная равна нулю $\partial v/\partial x=0$, по закону трения *Ньютона* поперечное касательное напряжение в направлении y тоже будет равно нулю: $\pi_{xy(н)}=\mu\partial v/\partial x=0$, что вполне объяснимо отсутствием *поперечного течения* в направлении y, т.к. $v\equiv 0$ по всему каналу. По гипотезе *Стокса* о симметричности касательных напряжений $\pi_{yx(c)}=\pi_{xy(c)}$, получается парадокс, заключающийся в том, что поперечное касательное напряжение не равно нулю, ибо

$$\pi_{xy(c)}=\pi_{yx(c)}=\frac{dp}{dx}y\neq 0\,,$$

что вступает в противоречие с фундаментальным законом трения *Ньютона,* по которому, как было выше доказано, поперечное касательное напряжение равно нулю $\pi_{xy(н)}=0.$ Т.о. в течении *Пуазейля* поперечные и продольные касательные напряжения не равны между собой, т.е. их симметричность относительно левой главной диагонали тензора напряжений π_c в виде (2) не имеет места. Это противоречие совершенно аналогично излагаемому ниже парадоксу с касательными напряжениями по *Стоксу* (2) в течении *Хагена-Пуазейля* в трубе. Для течения *Куэтта* несимметричность касательных напряжений устанавливается аналогично.

3^0. Парадокс гипотезы *Стокса* $S_2=\dot{S}$ в произвольных течениях

Для бесконечного числа течений симметричные касательные напряжения *Стокса* (2) имеют нулевые значения, т.е. во всех точках потока равны нулю

$$\pi_{ji(c)} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \equiv 0, i \neq j, i = 1,2,3,\ j = 1,2,3$$

Ограничимся приведением небольшого перечня течений с компонентами скоростей, в которых этот факт имеет место:

1) $u=F(\sin k_1 x \cos k_1 y)$, $v=F(-\cos k_1 x \sin k_1 y)$,

2) $u= U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y)$,

$v= U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y)$,

3) $u=W(-\cos k_3 x \sin k_3 y)$, $v=W(\sin k_3 x \cos k_3 y)$,

4) $u=Q(\sin k_4 x \sin k_4 y)$, $v=Q(\cos k_4 x \cos k_4 y)$,

5) $u=T(\sin k_5 x \sin k_5 y)$, $v=T(\cos k_5 x \ \cos k_5 y)$,

6) $u_x=M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x)$,

$v=M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x)$,

7) $u=S(e^{k_7(x+y)})$, $v=-S(e^{k_7(x+y)})$,

для трехмерных течений

8) $u=D((e^{k_8 y} - e^{k_8 z})e^{k_8 x})$,

$v=D((e^{k_8 z} - e^{k_8 x})\ e^{k_8 y})$,

$w=D((e^{k_8 x} - e^{k_8 y})e^{k_8 z})$,

где коэффициенты $k_i = const, i = 1,2,3,4,5,6,7,8$ выбираются

произвольно из бесконечного интервала $-\infty < k_i < +\infty$. Стоящие здесь дифференцируемые функции *F,U,W,Q,T, M,S,D* также произвольны в выборе. Очевидно, из указанного перечня можно образовать новые любые линейные комбинации типа *u=F+U, v=F+U* и т.д.. Поля скоростей 1-7 соответствуют плоским течениям и удовлетворяют двумерному уравнению неразрывности $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$, поля скоростей 8) удовлетворяют трехмерному уравнению неразрывности $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$.

Для всех этих течений касательные напряжения *Стокса* тождественно равны нулю во всех точках потоков:

$$\pi_{ji(c)}=\pi_{ij(c)}=\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=0, i\neq j, i=1,2,3,\ j=1,2,3$$

Для сжимаемого газа число течений, в которых имеют место нулевые напряжения *Стокса* $\pi_{ijc}=\pi_{jic}=0, i\neq j$, бесконечно возрастает из-за присутствия в уравнении неразрывности переменной плотности ρ. Таким образом, в течениях с компонентами скоростей типа 1,2,3,4,5,6,7,8 симметричные напряжения (2) обращаются в нули $\pi_{ji(c)}=0, i\neq j$ и получается так, что движение вязкой жидкости происходит без трения, что противоречит фундаментальному закону *Ньютона* $\pi_{ns}=\mu\partial v_s/\partial n$. Нетрудно вычислить по этой формуле, что касательные напряжения в указанных течениях не равны нулю

$$\pi_{ji(\text{н})}=\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\neq 0,\quad i\neq j \qquad (6)$$

4⁰. Парадокс гипотезы *Стокса* $S_2=\dot{S}$ в течении *Хагена-Пуазейля* в круглой трубе

Ламинарное течение вязкой жидкости в круглой трубе (см./1/) в цилиндрических координатах имеет скорости

$$V_z=-\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(a^2-r^2), V_r=0, V_\varphi=0,\ \frac{dp}{dz}=const,$$

где a — радиус трубы, z - осевая, r - радиальная координаты.

По гипотезе *Стокса* (2) симметричные касательные напряжения равны между собой и вычисляются по формуле /1/

$$\pi_{zr(c)} = \pi_{rz(c)} = \mu\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\frac{dp}{dz}r \qquad (7)$$

Рассмотрим течение в положительном направлении оси z, оно возникает при падении давления $\frac{dp}{dz} = const < 0$.

При этом по формуле (7) продольные касательные напряжения отрицательны $\pi_{rz(c)} < 0$, по гипотезе *Стокса* (хотя течение в поперечном направлении ***r*** отсутствует) в силу симметричности (3) существуют и являются отрицательными поперечные касательные напряжения

$$\pi_{zr(c)} = \pi_{rz(c)}, \pi_{zr(c)} < 0$$

их направления показаны на рис.1.

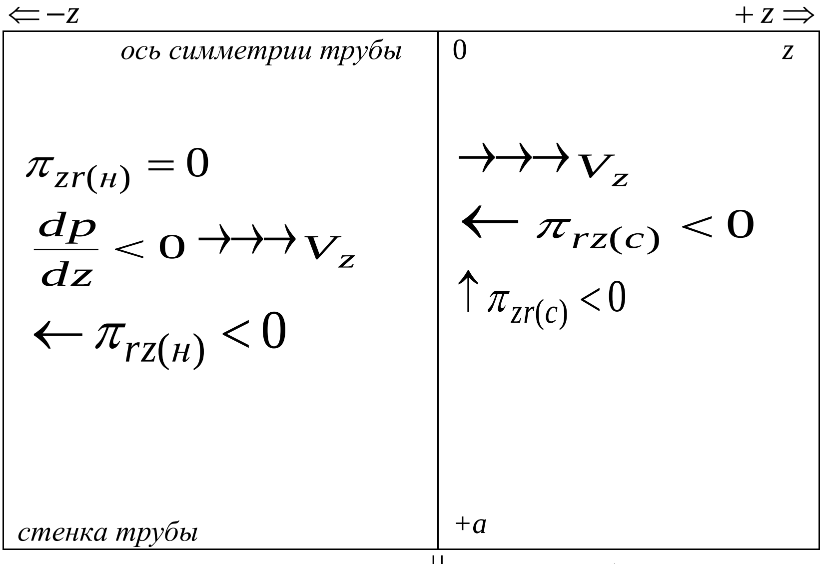


Рис.1

По фундаментальному закону трения *Ньютона* поперечные касательные напряжения равны нулю $\pi_{zr(н)} = \mu\partial v_r / \partial z = 0$, ибо

$v_r = 0$, продольные касательные напряжения отрицательны

$$\pi_{rz(н)} = \mu \partial v_z / \partial r = 1/2(dp/dz)r < 0,$$

причем как касательное напряжение по гипотезе *Стокса* так и касательное напряжение по формуле *Ньютона* $\pi_{rz(c)} < 0$, $\pi_{rz(н)} < 0$ имеют одинаковые направления против течения.

При положительном градиенте $dp/dz > 0$ жидкость в трубе течет в отрицательном направлении оси z (справа налево), касательные напряжения меняют знаки в силу (7)

$$\pi_{rz(c)} > 0, \ \pi_{zr(c)} > 0,$$

по закону трения *Ньютона*

$$\pi_{rz(н)} > 0, \ \ \pi_{zr(н)} = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$$

и течение будет в направлении "$-z$", что отражено на рис.2.

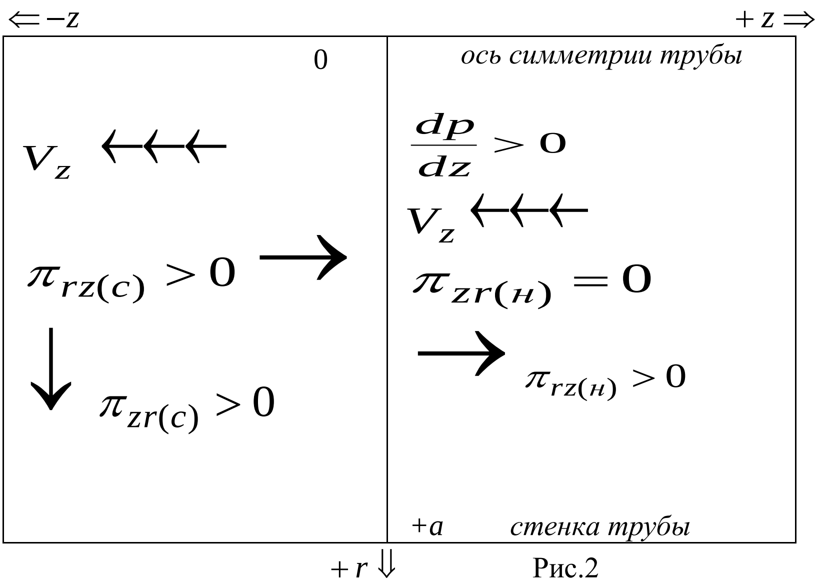


Рис.2

Разворот рис.2 на 180^o приводит к рис.3, на котором показано, что течение в трубе направлено в ту же сторону, что и на рис.1. **Противоречие** заключается в расположении не равного нулю касательного напряжения по гипотезе *Стокса* $\pi_{zr(c)}$, которое на рис. 3 ***направлено к стенке трубы***, а на рис.1 ***направлено к оси трубы при одинаковой направленности течения, тогда как напряжение*** $\pi_{rz(c)}$ ***в обоих случаях направлено против течения!***

Напротив, по закону *Ньютона* касательное напряжение равно нулю:

$$\pi_{zr(н)} = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0,$$

т.к. $v_r = 0$ из-за отсутствия радиального течения.

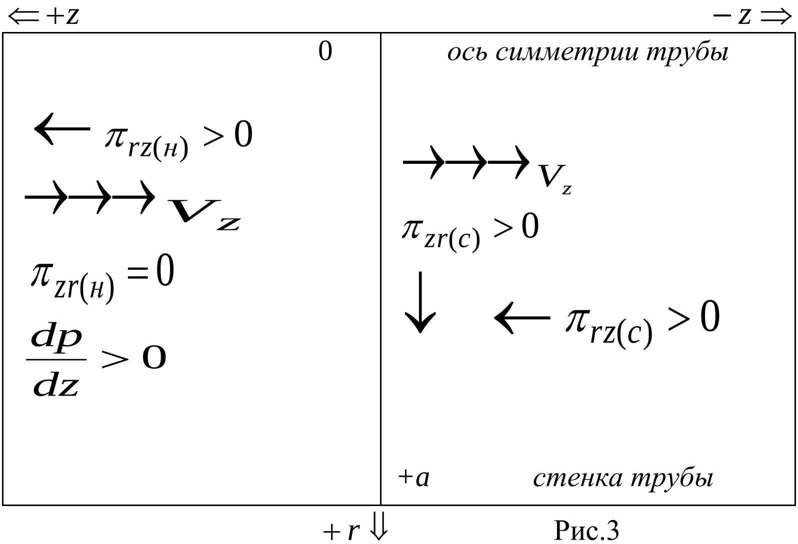


Рис.3

Очевидно, для несимметричного тензора (6) противоречия, подтвержденного рисунками.1-3, не возникает, в то время как для симметричного тензора напряжений *Стокса* (2) имеет место указанный на рисунках 1,2,3 *парадокс.*

Аналогичный *парадокс* с направлениями симметричных стоксовых касательных напряжений, очевидно, получается в течениях *Пуазейля* и *Куэтта*.

§7. Несимметрический тензор напряжений *Ньютона.* Парадоксы определения вязких нормальных напряжений связаны с гипотезами о давлении и с законом *Паскаля* для идеальных жидкостей

Закон линейной зависимости напряжений от скоростей деформаций, предложенный *Стоксом* в **1845г.** как неадекватное обобщение закона трения *Ньютона,* можно связать с формулой *Гельмгольца* или рядом *Тейлора,* (что одно и то же):

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\frac{1}{2}[\ rot\vec{v},\delta\vec{r}\ ]+\dot{S}\delta\vec{r} \qquad (1)$$

эквивалентная запись (1) имеет вид:

$$\delta\vec{v}=\hat{S}\delta\vec{r}+\dot{S}\delta\vec{r}$$

Эту формулу необходимо представить в раскрытом виде

$$\delta v_i=\sum_{j=1}^{3}[\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})]\delta x_j, i=1,2,3 \qquad (2)$$

Отнеся (2) к бесконечно малому отрезку времени δt, получаем ***конвективную составляющую ускорения***

$$\frac{\delta v_i}{\delta t}=\sum_{j=1}^{3}[\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})]\frac{\delta x_j}{\delta t}, i=1,2,3$$

На основании (2) *Стокс* выдвинул гипотезу о том, что напряжения пропорциональны удвоенному *деформационному смещению* $2\dot{S}\ \delta\vec{r}$. Гипотеза была сформулирована в виде *обобщенного закона Ньютона* (другое название - *закон Стокса)* с симметричным тензором напряжений

$$\pi_{ji(c)}=-(p+\frac{2}{3}\mu div\vec{v})\delta_{ij}+\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}), i,j=1,2,3, \qquad (3)$$

где δ_{ij} - символ *Кронекера*.

Как было отмечено, появление множителя «2» в $2\dot{S}\ \delta\vec{r}$ связано с *подгонкой* касательного напряжения по *Стоксу* (3) $\pi_{ji(c)} = \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}), i \neq j$ к закону трения *Ньютона* (6) **§6**:

$\pi_{ji(\text{н})} = \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j},\ i \neq j$. **В связи с этим ставится вопрос: если напряжения (3) вызваны деформационными смещениями $\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\delta x_j$, то какие же напряжения создают стоящие в (2) вращательные смещения $\frac{1}{2}[\ rot\vec{v}, \delta\vec{r}\ ]$ или** $\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\delta x_j$? Тем более, что во вращательное движение входят те же градиенты $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, что стоят и в $\pi_{ji(c)}$, $i \neq j$, более того $\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\frac{\delta x_j}{\delta t}$ является составной частью *конвективного ускорения*!

Парадоксальное пренебрежение *Стоксом* этими силами мотивировано подгонкой гипотезы (3) к *ошибочному положению о симметричности тензора напряжений*. (*Несимметричность* тензора напряжений сплошной среды будет строго доказано в нижеследующих параграфах.)

Ответом на поставленный выше вопрос является настоятельная *необходимость* учета напряжений

$$\pi^*_{ji} = \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}),$$

образованными *вращательными смещениями среды*, наравне с напряжениями

$$\pi_{ji}^{**} = \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}),$$

образованными в потоке *деформационными* смещениями*, т.е. нельзя пренебрегать столь важной составляющей общего движения, как* $\frac{1}{2}[\ rot\vec{v}, \delta\vec{r}\ ] \equiv \hat{S}\delta\vec{r}$. В результате этого суммарная сила определяется уже в виде

$$\pi_{ji(н)} = -(p + \frac{1}{3}\mu div\vec{v})\delta_{ji} + \pi_{ji}^{*} + \pi_{ji}^{**},$$

что после подстановки $\pi_{ij}^{*}, \pi_{ij}^{**}$ приводит к несимметрическому тензору напряжений

$$\pi_{ji(н)} = -(p + \frac{1}{3}\mu div\vec{v})\delta_{ij} + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3 \qquad (4)$$

Эта формула автоматически соответствует как ряду *Тейлора* $\delta v_j = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\delta x_i$ так и закону трения *Ньютона* $\pi_{ns} = \mu\frac{\partial v_s}{\partial n}$ и дает *несимметричные* значения касательных напряжений (6) **§6**: $\pi_{ji(н)} = \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j},\ \ i \neq j$. В декартовых координатах это будет так:

$$\pi_{yx(н)} = \mu\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \pi_{xy(н)} = \mu\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \pi_{xz(н)} = \mu\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\pi_{zx(н)} = \mu\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \pi_{zy(н)} = \mu\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \pi_{yz(н)} = \mu\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Нормальные напряжения, в силу равенств (7) §2, равны

$$\bar{S}_{xx} = \dot{e}_x, \bar{S}_{yy} = \dot{e}_y, \bar{S}_{zz} = \dot{e}_z,$$

$$\dot{e}_x = \partial u / \partial x, \dot{e}_y = \partial v / \partial y, \dot{e}_z = \partial w / \partial z,$$

$$\pi_{xx(н)} = -(p + \frac{1}{3}\mu div\vec{v}) + \mu\frac{\partial u}{\partial x},\ \pi_{yy(н)} = -(p + \frac{1}{3}\mu div\vec{v}) + \mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\pi_{zz(н)} = -(p + \frac{1}{3}\mu div\vec{v}) + \mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

где, в отличие от нормальных напряжений *гипотезы Стокса,* стоит $1/3\mu div\vec{v}$, (попытка обоснования этой формулы предпринята *А.В.Лыковым* в /3/).

Парадоксы определения вязких нормальных напряжений

Первая гипотеза о давлении гласит: *среднеарифметическое значение вязких нормальных напряжений должно быть равно давлению со знаком минус (см. /1 /):*

$$\frac{\pi_{xx(н)} + \pi_{yy(н)} + \pi_{zz(н)}}{3} = -p \qquad (5)$$

В силу данной гипотезы в нормальные напряжения в законе *Стокса* (3) был *искусственно* включен член $2/3\mu div\vec{v}$ и в (4) по аналогии включен $1/3\mu div\vec{v}$. Эти искусственные гипотетические включения обеспечивают безусловное выполнение гипотезы о давлении (5).

Известно, что гипотеза (5) для идеальных жидкостей является законом *Паскаля* $\vec{p}_n = -p\vec{n}$, безусловно выполняется для *несжимаемых вязких жидкостей* $div\vec{v} = 0$, даже если нормальные напряжения в них определить с произвольным коэффициентом $\bar{\mu}$:

$$\pi_{ii} = -p + \bar{\mu}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3, \qquad (6)$$

а касательные напряжения определить по закону *Ньютона*

$$\pi_{ji} = \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i \neq j$$

При $\bar{\mu}$=0 в (6) , $\pi_{ii} = -p, \quad i = 1,2,3$, вытекает закон *Паскаля.* При значении $\bar{\mu} = \mu$ нормальные и касательные напряжения определяются единой записью

$$\pi_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3, \qquad (7)$$

т.е. имеет место канонический несимметричный тензор

$$\pi \;\; = -pE + \mu \overline{S} \qquad (8)$$

Если в определении вязких нормальных напряжений исходить из первой гипотезы (5), то налицо произвол, связанный с выбором коэффициента $\overline{\mu}$. (Вполне возможно, что при моделировании турбулентных течений это обстоятельство может сыграть немаловажную роль)

Вторая гипотеза о давлении гласит: *что нормальные напряжения в сжимаемом газе* $div\vec{v} \neq 0$ *должны удовлетворять уравнению*

$$\frac{\pi_{xx(н)} + \pi_{yy(н)} + \pi_{zz(н)}}{3} = -p + \mu' div\vec{v}\,, \qquad (9)$$

где произвольный коэффициент μ' (для его выбора нет каких-либо физических обоснований) объявляется коэффициентом *объемной вязкости* или *вторым коэффициентом вязкости*.

Нетрудно вычислить, что вторая гипотеза выполняется для нормальных напряжений вида

$$\pi_{ii(н)} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, i = 1,2,3, \quad (10)$$

т.е. несимметричный тензор напряжений оформляется в виде

$$\pi_{ji(н)} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}]\delta_{ij} + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3, \quad (11)$$

$$\pi_{н} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v})]E + \mu\overline{S} \qquad (12)$$

Как сказано, имеется определенный произвол в выборе множителя μ'. Распоряжаясь данным произволом, положим $\mu' = \frac{1}{3}\mu$, благодаря чему нормальные напряжения (10) в *сжимаемых газах* $div\vec{v} \neq 0$ *примут вид*

$$\pi_{ii} = -p + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \;\; i = 1,2,3, \qquad (13)$$

совпадающий с нормальными напряжениями в несжимаемых $div\vec{v} = 0$ жидкостях (7) $\overline{\mu} = \mu$, т.е. (12) перейдет в (8) и будет иметь место ***единый реологический закон*** как *для несжимаемых жидкостей так и для сжимаемых газов:*

$$\pi = -pE + \mu\bar{S}\ , \pi_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3 \quad (14)$$

Лишь гипотеза (9) примет иную форму

$$\frac{\pi_{xx(н)} + \pi_{yy(н)} + \pi_{zz(н)}}{3} = -p + \frac{1}{3}\mu div\vec{v}\,, \quad (15)$$

которая соответствует нормальным напряжениям (13)!

В случае несжимаемых жидкостей с $div\vec{v} = 0$ гипотеза (15) автоматически переходит в закон *Паскаля.*

Тем самым показано: 1) что включение комплексов $1/3\mu div\vec{v}$ или $2/3\mu div\vec{v}$ есть некая совершенно очевидная подгонка вязких нормальных напряжений к гипотезе о давлении (5); 2) формулы нормальных напряжений зависят от вида гипотезы о давлении.

Отказ от искусственных добавок типа $2/3\mu div\vec{v}$, $1/3\mu div\vec{v}$, $(2/3\mu - \mu')div\vec{v}$, $(1/3\mu - \mu')div\vec{v}$, значительно упрощает тензор напряжений, следовательно, и уравнения динамики вязкого сжимаемого газа с $div\vec{v} \neq 0$.

Приведенные выше парадоксы с гипотезами о давлении и реологический закон *Ньютона* (14) позволяют сделать вывод: пропорциональность вязкой части нормальных напряжений диагональным элементам тензора перемещения $\bar{S}$, обоснована законом трения *Ньютона*, в силу которого касательные напряжения пропорциональны недиагональным элементам тензора $\bar{S}$.

Реологический закон *Ньютона* (14) освобождает уравнения динамики *вязких сжимаемых газов* в диссипативной части от смешанных производных, в связи с этим на **12 производных** сокрашаются трехмерные уравнения, а если сравнивать с уравнениями *Навье-Стокса,* то в общей сумме в новых уравнениях на **18 производных** меньше содержится по сравнению с уравнениями *Навье-Стокса.* Кроме того, наличие смешанных производных влияет на тип уравнений, т.е. на квазипараболичность, создает определенные трудности при исследовании устойчивости разностных схем для численного их решения.

В §5 было отмечено, что в универсальной формуле

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\frac{b-1}{b}[\ rot\vec{v},\delta\vec{r}\ ]+S_b\delta\vec{r}$$

при *b=1* стоит матрица $S_1=\bar{S}$, поэтому переход к тензору перемещения $\bar{S}$ совершается при *b=1*

$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\bar{S}\delta\vec{r}$$

тем самым доказывается, что для ***построения тензора напряжений Ньютона нет особой необходимости в первой теореме Гельмгольца, следует непосредственно исходить из ряда Тейлора*** $\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t)=\vec{v}(\vec{r},t)+\bar{S}\delta\vec{r}$.

Разделение ряда *Тейлора* на симметричную $\dot{S}\ \ \delta\vec{r}$ и антисимметричную $1/2[\ rot\vec{v},\delta\vec{r}\ ]$ части напрямую связано с построением симметричного тензора напряжений сплошной среды и теорией деформаций (этот вопрос рассматривается здесь в **гл.9**).

Л. Д. Ландау, *Е. М. Лифщиц* в /10/ в качестве дополнительного требования к реологическому закону сплошной среды выдвинули следующее условие: «… *во вращающейся как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью вязкой жидкости все касательные напряжения должны обращаться в нули*».

Напряжения (6) удовлетворяют этому требованию. Действительно, в цилиндрической системе r,ε,z /1/, ньютоновские напряжения (7) имеют вид

$$\pi_{r\varepsilon}=\mu(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r}-\frac{v_\varepsilon}{r}),\ \ \pi_{\varepsilon r}=\frac{\mu}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon},\ \ \pi_{zr}=\mu\frac{\partial v_r}{\partial z},$$

$$\pi_{rz}=\mu\frac{\partial v_z}{\partial r},\pi_{z\varepsilon}=\mu\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z},\ \ \pi_{\varepsilon z}=\frac{\mu}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon},$$

$$\pi_{rr}=-[p+(\frac{1}{3}\mu-\mu')div\vec{v}]+\mu\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\pi_{\varepsilon\varepsilon} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r}{r}),$$

$$\pi_{zz} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$div\vec{v} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon},$$

для жидкости $div\vec{v} = 0$, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω, скорости равны (α - угол между $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$):

$$v_r = 0, v_z = 0, v_\varepsilon = \left|[\vec{\omega}, \vec{r}]\right| =$$

$$= |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha = \omega r \sin\alpha,$$

следовательно, равны нулю все касательные напряжения

$$\pi_{rz} = 0, \pi_{zr} = 0, \pi_{r\varepsilon} = 0, \pi_{\varepsilon r} = 0, \pi_{z\varepsilon} = 0, \pi_{\varepsilon z} = 0.$$

§8. Предпосылки ошибочного вывода о симметричности тензора напряжений

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_i, $i=1,2,...,N$ и с радиус - векторами r_i, $i=1,2,...,N$, на которые действуют силы $\vec{F}_i, i = 1,2,..., N$. Результирующая (главная) сила равна $\vec{F}^* = \sum_i \vec{F}_i$.

Момент результирующей (главной) силы равен $\vec{M}_c = [\vec{r}_c, \vec{F}^*]$, где $\vec{r}_c = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i$ - радиус-вектор центра масс, обозначаемый в дальнейшем просто $\vec{r}_c = \vec{r}$; а результирующий (главный) момент равен $\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$.

Теорема 1*. Для системы материальных точек момент результирующей силы не равен в общем случае результирующему моменту:* $\vec{M}_c \neq \vec{M}$.

Действительно, имеет место очевидное неравенство

$$[\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \sum_i \vec{F}_i] \neq \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i],$$

кроме этого, простейшим примером, являются лежащие на одной прямой противоположно направленные силы

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2,$$

суммарная сила здесь равна нулю:

$$\vec{F}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \textit{поэтому } \vec{M}_c = 0,$$

в то время как результирующий (главный) момент не равен нулю, если векторы $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $\vec{F}_1$ не параллельны между собой:

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_1] \neq 0 \qquad (1)$$

Теорема 2. *Для заданных взаимно перпендикулярных векторов* $\vec{Q} \perp \vec{F}$ *существует бесконечное число векторов* $\vec{r}^{\,*} = x^* \, \vec{i} + y^* \, \vec{j} + z^* \, \vec{k},$ *для которых имеет место равенство* $[\vec{r}^{\,*}, \vec{F}] = \vec{Q}$. *Если заданы взаимно перпендикулярные векторы* $\vec{Q} \perp \vec{r}^{\,*}$, *то существует бесконечное число векторов* $\vec{F}^*$, *для которых имеет место это равенство.*

Действительно, данное уравнение, решаемое относительно x^*, y^*, z^*, имеет определитель, равный нулю

$$y^* \, F_z - z^* \, F_y = Q_x, \; z^* \, F_x - x^* \, F_z = Q_y, \; x^* \, F_y - y^* \, F_x = Q_z, \quad (2)$$

где

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}$$

Из равенства $(\vec{r}^{\,*}, \vec{Q}) = 0$, вытекает выражение $x^* Q_x + y^* Q_y + z^* Q_z = 0$, которое представляется в виде

$$y^* Q_y + z^* Q_z = -x^* Q_x$$

и решается совместно с первым уравнением данной системы (2) . В результате получается бесконечное множество решений

$$y^* = \frac{Q_x(Q_z - x^* F_y)}{F_y Q_y + F_z Q_z}, \quad z^* = \frac{-Q_x(x^* F_z + Q_y)}{F_y Q_y + F_z Q_z}.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема 3. *Для заданного вектора* $\vec{Q}$ *можно найти бесконечное число векторов* $\vec{r}^*$ *и* $\vec{F}$ *, для которых имеет место равенство* $[\vec{r}^*, \vec{F}] = \vec{Q}$.

В этой теореме система (2) решается совместно с уравнениями

$$(\vec{r}^*, \vec{Q}) = 0 \text{ и } (\vec{F}, \vec{Q}) = 0,$$

в результате для 6 искомых величин $x^*, y^*, z^*, F_x, F_y, F_z$ получается 5 уравнений, т.е. 5 неизвестных будут выражены через шестую неизвестную, например, как в теореме 2, через x^*.

Результирующая сила стоит в правой части уравнения динамики (10) §3, где ради краткости напряжения обозначим нижними индексами

$$\vec{\pi}_x = \vec{\pi}_1, \vec{\pi}_y = \vec{\pi}_2, \vec{\pi}_z = \vec{\pi}_3,$$

Умножая (10) §3 векторно на $\vec{r}$, находим моменты

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] = \left[\vec{r}, \rho\vec{F} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}\right] \qquad (3)$$

Очевидно, в (3) ***момент главной силы*** равен

$$\vec{M}_C = \left[\vec{r}, \rho\vec{F} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}\right] \qquad (4)$$

Во-первых, симметричность тензора напряжений в /1/ выводится из теоремы об изменении момента импульса (момента количества движения), записанного в интегральном виде

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau [\vec{r}, \vec{v}\rho\delta\tau] = \iiint_\tau [\vec{r}, \vec{F}\rho\delta\tau] + \oiint_\sigma [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta\sigma],$$

с внесением дифференцирования в левой части под интеграл

$$\iiint_{\tau} \frac{d}{dt}[\vec{r},\vec{v}\rho\delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r},\vec{F}\rho\delta\tau] + \oiint_{\sigma} [\vec{r},\vec{\pi}_n\delta\sigma], \qquad (5)$$

что неправомерно, если объем $\tau = \tau(t)$ зависит от времени. Что касается правой части этого выражения, то в силу формулы (3) **§3** имеет место правильно составленное выражение

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} [\vec{r},\vec{v}\rho\delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r},\vec{F}\rho\delta\tau] + \iiint_{\tau} [\vec{r},\oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n\delta\sigma]$$

Из сформулированной таким образом теоремы (5) в /1/ , аналогично в других учебниках, получено неверное в общем случае соотношение

$$[\vec{r},\rho\frac{d\vec{v}}{dt}] = [\vec{r},\rho\vec{F}] + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{r},\vec{\pi}_j] \qquad (6)$$

Несоответствие выражение (6) фундаментальной теореме об изменении момента импульса системы частиц рассматривается ниже в §9. **В правой части** (6) **стоит результирующий (главный) момент**

$$\vec{M} = [\vec{r},\rho\vec{F}] + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{r},\vec{\pi}_j] \quad (7)$$

потому что (7) выводится из соотношения

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau} [\vec{r},\vec{v}\rho\delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r},\rho\vec{F}]\delta\tau + \oiint_{\sigma} [\vec{r},\sum_{j=1}^{3}\vec{\pi}_j\cos(\vec{n}; x_j)]\delta\sigma, \quad (8)$$

где в правой части стоит суммарный (в виде тройного интеграла) главный момент массовых сил $\iiint_{\tau}\left[\vec{r},\rho\vec{F}\right]\delta\tau$ и главный

момент поверхностных сил $\oiint_{\sigma} [\vec{r},\sum_{j=1}^{3}\vec{\pi}_j\cos(\vec{n}; x_j)]\delta\sigma$,

очевидно, имеющие различные радиус-вектора $\vec{r}$.

Дифференцированием (7) приводится к виду

$$\vec{M} = [\vec{r}, \rho\vec{F} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] + \sum_{j=1}^{3} [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j], \qquad (9)$$

В силу (4) *главный момент* (9) представляется в форме

$$\vec{M} = \vec{M}_c + \sum_{j=1}^{3} [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j] \ , \qquad (10)$$

По ***теореме 1*** эти моменты ***неравны*** между собой: $\vec{M}_c \neq \vec{M}$.

В /1/ и др. учебниках традиционно полагается равенство этих моментов, что возможно только при равенстве нулю последнего члена в (10):

$$\sum_{j=1}^{3} [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j] = 0 \qquad (11)$$

Для того чтобы момент результирующих сил $\vec{M}_c$ равнялся результирующему моменту $\vec{M}$ ***условие*** (11) ***должно выполняться в каждой точке сплошной среды.***

Теорема 4. *Условие* (11) *выполняется при следующих трех ситуациях*:

1.*Напряжения параллельны координатным осям:*

$$\vec{\pi}_j \parallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \ j = 1,2,3.$$

2.*Компоненты напряжений симметричны:*

$$\pi_{ij} = \pi_{ji}, i, j = 1,2,3. \qquad (12)$$

Таким образом, симметричность тензора напряжений (12) и вытекающая из нее симметричность напряжений противоречат ***теореме 1***, что подтверждается приведенными в §6 примерами 1-8 и перечнем парадоксов. **Отсюда следует логический вывод о том, что *симметричность тензора* напряжений по гипотезе *Стокса не есть физическое свойство среды*, а является следствием *искусственного* приравнивания главного момента $\vec{M}$ моменту главной**

силы $\vec{M}_c$, т.е. ***математическое условие*** **равенства этих моментов в том смысле, что если в некоторой точке потока выполняются одновременно условия** (12)**, то момент главной силы становится равным главному моменту $\vec{M}_c = \vec{M}$, если эти условия (13) не выполняются, то они неравны друг другу: $\vec{M}_c \neq \vec{M}$.** Следовательно, неправильно применена теорема об изменении момента импульса к произвольному объему сплошной среды, о чем было сказано в §3, ибо это приравнивание произошло вследствие приравнивания левых частей выражений (3) и (6). Тензор напряжений *несимметричен* в общем случае, о несимметричности для отдельных течений было указано в /3/. Является обоснованным вывод: ***для вязких сред справедлив реологический закон Ньютона с несимметричными касательными напряжениями*** **§*7*,** так как *гипотеза Стокса приводит к вышеуказанным противоречиям.*

§9. Из теоремы об изменении момента количеств движений не следует симметричность тензора напряжений

Для системы материальных точек с массами m_i, движущихся со скоростями $\vec{v}_i$ и на которых действуют силы $\vec{F}_i$, теорема об изменении момента импульса имеет вид /5/:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{F}_i] \qquad (1)$$

Для взятого в виде параллелепипеда объема $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ индивидуальных частиц сплошной среды, радиус-вектор $\vec{r}_m$ направляется в точку приложения результирующей массовой силы $\vec{F}\delta m$, соответственно, радиус-вектора результирующих поверхностных сил направлены в точки их действия на каждой грани параллелепипеда:

$$\vec{r}_{(x)2} \to \vec{\pi}_{x2},\ \vec{r}_{(x)1} \to \vec{\pi}_{-x1},\ \vec{r}_{(y)2} \to \vec{\pi}_{y2},\ \vec{r}_{(y)1} \to \vec{\pi}_{-y1},$$
$$\vec{r}_{(z)2} \to \vec{\pi}_{z2},\ \vec{r}_{(z)1} \to \vec{\pi}_{-z1}.$$

В силу этого по фундаментальной теореме (1) для $\delta\tau = \delta x\delta y\delta z$ ***главный момент сил*** будет представлен в виде

$$\vec{M}^* = [\vec{r}_m, \delta m\vec{F}] + [\vec{r}_{(x)2}, \vec{\pi}_{x2}\delta y\delta z] + [\vec{r}_{(x)1}, \vec{\pi}_{-x1}\delta y\delta z] +$$
$$+ [\vec{r}_{(y)2}, \vec{\pi}_{y2}\delta z\delta x] + [\vec{r}_{(y)1}, \vec{\pi}_{-y1}\delta z\delta x] +$$
$$+ [\vec{r}_{(z)2}, \vec{\pi}_{z2}\delta x\delta y] + [\vec{r}_{(z)1}, \vec{\pi}_{-z1}\delta x\delta y] \qquad (2)$$

Результирующая же сила стоит в правой части (3) §4 и равна

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}\delta m + (\vec{\pi}_{x_2} + \vec{\pi}_{-x1})\delta y\delta z + (\vec{\pi}_{y2} + \vec{\pi}_{-y1})\delta x\delta z +$$
$$+ (\vec{\pi}_{z2} + \vec{\pi}_{-z1})\delta x\delta y$$

Очевидно, по ***теореме 1*** **момент главной силы** ***не равен*** **главному моменту сил:** $[\vec{r}, \vec{F}_{рез}] \neq \vec{M}^*$. Рассмотрим более подробно подынтегральное выражение в левой части (8) **§8** $\frac{d}{dt}\iiint_\tau [\vec{r}, \vec{v}\rho\delta\tau]$, равное $[\vec{r}, \delta m\vec{v}]$ и представляющее собой момент главного импульса $\delta m\vec{v}$ массы $\delta m = \rho\delta\tau$, где $\delta\tau$ индивидуальный объем, в котором находится масса $\delta m = \sum_i m_i$, причем каждая частица обладает скоростью $\vec{v}_i$, т.е. существует соответствие $\vec{r}_i \to m_i \to \vec{v}_i, i = 1,2,...,$ в силу чего главный момент векторов системы частиц объема $\delta\tau$ будет равен $\sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$. По ***теореме 1*** он не равен моменту главного импульса $[\vec{r}, \delta m\vec{v}]$: $\sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] \neq [\vec{r}, \delta m\vec{v}]$,

ибо

$$\left[\vec{r},\delta m\vec{v}\right]=\left[\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i},\sum_i m_i\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}\right],$$

следовательно, равенство между ними возможно только при выполнении условий ***теорем 2 или 3.*** При предельном переходе $\vec{r}$ в рассматриваемом выражении $\left[\vec{r},\delta m\vec{v}\right]$ является конкретным радиус-вектором точки сплошной среды, значит, по ***теореме 3*** $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ будет произвольным вектором, поэтому равенство между $\iiint\limits_{\tau}[\vec{r},\rho\dfrac{d\vec{v}}{dt}]\delta\tau$, которое получено интегрированием по всему объему сплошной среды обеих частей (3) §8

$$\iiint\limits_{\tau}[\vec{r},\rho\frac{d\vec{v}}{dt}]\delta\tau=\iiint\limits_{\tau}[\vec{r},\rho\vec{F}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{\pi}_j}{\partial x_j}]\delta\tau\ ,$$

и $\iiint\limits_{\tau}\dfrac{d}{dt}[\vec{r},\vec{v}\rho\delta\tau]$ невозможно, тем самым обосновано неравенство в силу зависимости $\tau=\tau(t)$

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau}[\vec{r},\vec{v}\rho\delta\tau]\neq\iiint\limits_{\tau}\frac{d}{dt}[\vec{r},\vec{v}\rho\delta\tau],$$

а правая часть преобразуется к выражению

$$\iiint\limits_{\tau}\frac{d}{dt}[\vec{r},\vec{v}\delta m]=\iiint\limits_{\tau}\left\{\ [\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{v}\delta m]+[\vec{r},\delta m\frac{d\vec{v}}{dt}]+[\vec{r},\vec{v}\frac{d\delta m}{dt}]\ \right\}=$$

$$=\iiint\limits_{\tau}\left\{\ [\vec{r},\delta m\frac{d\vec{v}}{dt}]+[\vec{r},\vec{v}\frac{d\delta m}{dt}]\ \right\}$$

Совершенно аналогичные выводы надо сделать и для момента массовых сил $[\vec{r},\delta m\vec{F}]$, ибо $\vec{F}$ есть результирующая всех сил $\vec{F}_i$ в объеме $\delta\tau$, действующих на частицы m_i сплошной среды, причем

$$\delta m=\sum_i m_i\ ,\ \vec F=\sum_i m_i\vec F_i/\sum_i m_i=\sum_i m_i\vec F_i\Big/\delta m$$

По ***теореме 1*** $[\vec r,\delta m\vec F]\neq\sum_i[\vec r_i,m_i\vec F]$, поэтому для конкрет-

кретного вектора $\vec r$ по ***теореме 3*** равенство

$$[\vec r,\delta m\vec F^*]=\sum_i[\vec r_i,m_i\vec F]$$

возможно только для такого вектора $\vec F^*$, который не будет в общем случае равен истинному $\vec F$: $\vec F^*\neq\vec F$, т.е. в правой части (7) **§8** стоит на самом деле $\vec F^*$, являющийся совершенно произвольным вектором. Классическая формула из /1/

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau[\vec r,\vec v\delta m]=\iiint_\tau[\vec r,\vec F\delta m]+\oiint_\sigma[\vec r,\vec\pi_n\delta\sigma]\qquad(3)$$

в силу указанных выше причин не соответствует фундаментальной теореме об изменении момента импульса (1).

Действительно, теорема *об изменении момента импульса*

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N[\vec r_i,m_i\vec v_i]=\sum_{i=1}^N[\vec r_i,\vec f_i]$$

должна быть написана в индивидуальном объеме $\delta\tau$ в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec r_i,m_i\vec v_i]=\sum_i[\vec r_i,m_i\vec F_i]+\oiint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec r_{\sigma k},\vec\pi_{nk}\sigma_k],$$

следовательно, для объема τ в виде тройного интеграла

$$\iiint_\tau\frac{d}{dt}\sum_i[\vec r_i,m_i\vec v_i]=\iiint_\tau\sum_i[\vec r_i,m_i\vec F_i]+\iiint_\tau\oiint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec r_{\sigma k},\vec\pi_{nk}\sigma_k]\qquad(4)$$

Согласно теоремам 2, 3, между соответствующими членами выражений (3) и (4) нельзя ставить знак равенства, т.е. имеют место очевидные неравенства

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau[\vec r,\vec v\delta m]\neq\iiint_\tau\frac{d}{dt}\sum_i[\vec r_i,m_i\vec v_i],\ \iiint_\tau[\vec r,\vec F\delta m]\neq\iiint_\tau\sum_i[\vec r_i,m_i\vec F_i],$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\sigma}[\vec{r},\vec{\pi}_n]\delta\sigma \neq \iiint_{\tau}\oint\!\!\!\oint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec{r}_{\sigma k},\vec{\pi}_{nk}\sigma_k], \qquad (5)$$

которые подтверждают различие выражений (3) и (4). Надо иметь в виду то обстоятельство, что подвижная система координат, имеющая начало в центре массы $\delta m = \sum_i m_i$, следовательно, движущаяся с ускорением $d\vec{v}/dt \neq 0$, будет *неинерциальной* системой. Здесь в (5), как и ранее $\vec{\pi}_n\delta\sigma = \sum_k \vec{\pi}_{nk}\sigma_k$ - главная поверхностная сила, действующая на $\delta\sigma = \sum_k \sigma_k$, причем $\delta\sigma \in \sigma_{\delta\tau}$, σ_k –участок поверхности $\delta\sigma$, которую занимает частица $m_{\sigma k}$, находящаяся под действием напряжения $\vec{\pi}_{nk}$, векторы $\vec{r}_{\sigma k}$ направлены на частицы $m_{\sigma k}$, лежащие на поверхности $\sigma_{\delta\tau}$, ч.т.д.

Из (4) по указанным выше обстоятельствам уже не следует симметричность тензора напряжений, т.е. $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}, j \neq i$, т.к. в обеих частях (4) стоят главные моменты, по ***теореме 1*** не равные моментам результирующих векторов в (3).

§10. Тензор напряжений сплошной среды *не симметричен*

Покажем детально еще раз ошибочность равенства (6) §8, широко применяемого в /1/,/2/,/3/,/4/ для доказательства симметричности тензора напряжений. Представим его в виде

$$[\vec{r},\rho\frac{d\vec{v}}{dt}]-[\vec{r},\rho\vec{F}]-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{r},\vec{\pi}_j]=0 \qquad (6)$$

Из этого выражения теоретически получена *симметричность* тензора напряжений сплошной среды и, как следствие этого, подгонка *симметричности* касательных напряжений вязкой жидкости в гипотезе *Стокса* /1/.

Докажем, что на самом деле левая часть (6) не равна нулю:

$$[\vec{r},\rho\frac{d\vec{v}}{dt}]-[\vec{r},\rho\vec{F}]-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{r},\vec{\pi}_j]\neq 0$$

С этой целью сформулируем теорему об изменении моментов импульсов (количеств движений) для индивидуального обьема $\delta\tau$ сплошной среды:

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i,m_i\vec{v}_i]=\sum_i[\vec{r}_i,m_i\vec{F}_i]+\oint\!\!\oint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec{r}_{\sigma k},\vec{\pi}_{nk}\sigma_k] \qquad (7)$$

Между векторами $\vec{r}$ в (86) и $\vec{r}_i$, $\vec{r}_{\sigma k}$ в (7) имеет место связь

$$\vec{r}_i=\vec{r}+\vec{r}_i', \quad \vec{r}_{\sigma k}=\vec{r}+\vec{r}_{\sigma k}',$$

откуда вытекает связь и между скоростями

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d\vec{r}_i'}{dt}, \quad \vec{v}_i=\vec{v}+\vec{v}_i'$$

Подставляя их в (7), найдем

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}+\vec{r}_{i'}',m_i(\vec{v}+\vec{v}_i')]=\sum_i[\vec{r}+\vec{r}_i',m_i\vec{F}_i]+$$

$$+\oint\!\!\oint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec{r}+\vec{r}_{\sigma k}',\vec{\pi}_{nk}\sigma_k] \qquad (8)$$

Проделаем необходимые преобразования

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}+\vec{r}_{i'}',m_i(\vec{v}+\vec{v}_i']=\frac{d}{dt}[\vec{r},\sum_i m_i\vec{v}]+\frac{d}{dt}[\vec{r},\sum_i m_i\vec{v}_i']+$$

$$+\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i',m_i\vec{v}]+\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i',m_i\vec{v}_i']=\frac{d}{dt}[\vec{r},\delta m\vec{v}]+\frac{d}{dt}[\vec{r},\sum_i m_i\vec{v}_i']+$$

$$+\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i',m_i\vec{v}]+\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i',m_i\vec{v}_i']$$

Здесь в объеме $\delta\tau$ учтено $\delta m = \sum_i m_i = \rho\delta\tau$. Имея в виду $\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau div\vec{v}$, проделаем следующие преобразования

$$\frac{d}{dt}[\vec{r},\delta m\vec{v}] = [\frac{d\vec{r}}{dt},\delta m\vec{v}] + [\vec{r},\delta m\frac{d\vec{v}}{dt}] + [\vec{r},\frac{d\delta m}{dt}\vec{v}] =$$

$$= [\frac{d\vec{r}}{dt},\rho\delta\tau\vec{v}] + [\vec{r},\rho\delta\tau\frac{d\vec{v}}{dt}] + [\vec{r},\frac{d(\rho\delta\tau)}{dt}\vec{v}] = [\vec{r},\rho\delta\tau\frac{d\vec{v}}{dt}] +$$

$$+ [\vec{r},(\rho\frac{d\delta\tau}{dt} + \delta\tau\frac{d\rho}{dt})\vec{v}] = [\vec{r},\rho\delta\tau\frac{d\vec{v}}{dt}] +$$

$$+ [\vec{r},(\rho\delta\tau div\vec{v} + \delta\tau\frac{d\rho}{dt})\vec{v}] = [\vec{r},\rho\delta\tau\frac{d\vec{v}}{dt}]$$

Здесь использовано равенство $[\frac{d\vec{r}}{dt},\rho\delta\tau\vec{v}]$ =0 и равенство нулю уравнения неразрывности: $\rho\delta\tau div\vec{v} + \delta\tau\frac{d\rho}{dt} = 0$.

Окончательно имеем

$$\frac{d}{dt}\sum_i\left[\vec{r} + \vec{r}_{i'}, m_i(\vec{v} + \vec{v}_i{}')\right] = [\vec{r},\rho\delta\tau\frac{d\vec{v}}{dt}] +$$

$$+ \frac{d}{dt}[\vec{r},\sum_i m_i\vec{v}_i{}'] + \frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i{}', m_i\vec{v}] + \frac{d}{dt}\sum_i\left[\vec{r}_i{}', m_i\vec{v}_i{}'\right] \qquad (9)$$

Далее в правой части (8)

$$\sum_i[\vec{r} + \vec{r}_i{}', m_i\vec{F}_i] = [\vec{r},\sum_i m_i\vec{F}_i] + \sum_i[\vec{r}_i{}', m_i\vec{F}_i] =$$

$$= [\vec{r},\vec{F}\delta m] + \sum_i[\vec{r}_i{}', m_i\vec{F}_i] = [\vec{r},\vec{F}\rho\delta\tau] + \sum_i[\vec{r}_i{}', m_i\vec{F}_i],$$

$$\oiint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec{r} + \vec{r}_{\sigma k}{}', \vec{\pi}_{nk}\sigma_k] = \oiint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec{r},\vec{\pi}_{nk}\sigma_k] + \oiint_{\sigma_{\delta\tau}}\sum_k[\vec{r}_{\sigma k}{}', \vec{\pi}_{nk}\sigma_k]$$

где по теореме *Остроградского-Гаусса* и теореме о среднем для элементарного объема $\delta\tau$ имеют место преобразования

$$\oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}, \vec{\pi}_{nk}\sigma_k] = \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} [\vec{r}, \sum_k \vec{\pi}_{nk}\sigma_k] = \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta\sigma] =$$

$$= \iiint_{\delta\tau} \sum_j \frac{\partial[\vec{r}, \vec{\pi}_j]}{\partial x_j} \delta\tau' = \sum_j \frac{\partial[\vec{r}, \vec{\pi}_j]}{\partial x_j} \delta\tau$$

В результате этих преобразований (8) примет вид

$$[\vec{r}, \rho\delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt}] + \frac{d}{dt}[\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] =$$

$$= [\vec{r}, \vec{F}\rho\delta\tau] + \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial[\vec{r}, \vec{\pi}_j]}{\partial x_j} \delta\tau + \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk}\sigma_k]$$

Поделив это выражение на $\delta\tau$ и проделав перегруппировку, получаем

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho\vec{F}] - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] =$$

$$= -\frac{1}{\delta\tau} \{ \frac{d}{dt}[\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] \} +$$

$$+ \frac{1}{\delta\tau} (\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] + \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk}\sigma_k]) \qquad (10)$$

Правая часть (10) *не равна нулю*

$$- \frac{1}{\delta\tau} \{ \frac{d}{dt}[\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] \} +$$

$$+ \frac{1}{\delta\tau} (\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] + \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk}\sigma_k]) \neq 0 , \qquad (11)$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, уравнение (6), которое применяется в учебниках *Лойцянского* /1/ и *Седова* /2/ в качестве теоремы об изменении момента импульса **ошибочно**. Очевидно из (10), что в формуле (6) *Лойцянского* /1/ и *Седова* /2/ не может стоять знак равенства. На самом деле в силу (10) имеет место быть **неравенство:**

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] \neq [\vec{r}, \rho\vec{F}] + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j]$$

Общеизвестно, что теоретический вывод о симметричности тензора напряжений устанавливается исходя из равенства (6). **Так как (6) не имеет места в силу (10), то и нет в общем случае симметричности тензора напряжений в сплошной среде, что требовалось доказать.**

Примечание. В состоянии равновесия скорости всех частиц жидкости равны нулю $\vec{v}_i = 0 \quad \forall i,\ \vec{v} = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, уравнение равновесия сплошной среды

$$\rho\vec{F} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j} = 0, \tag{12}$$

является равенством нулю главной силы (см. **§8)**, кроме того, выражение (11) будет равно нулю

$$\frac{1}{\delta\tau}\{\frac{d}{dt}[\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i']\} = 0 \tag{13}$$

По фундаментальному определению момента количеств движения (7) будет равно нулю в правой части (10) и выражение

$$\frac{1}{\delta\tau}(\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] + \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk} \sigma_k]) = 0 \tag{14}$$

В силу равенств (13) и (14) в состоянии равновесия будет иметь место равенство нулю главного момента сил

$$\vec{M} = [\vec{r}, \rho\vec{F}] + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0 \tag{15}$$

Из (12) вытекает равенство нулю момента главной силы:

$$\vec{M}_c = [\vec{r}, \rho\vec{F} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] = 0 \tag{16}$$

По теореме 1 **§8** в общем случае они не равны между собой по определению: $\vec{M}_c \neq \vec{M}$. Их равенство $\vec{M}_c = \vec{M}$ имеет место при условиях теоремы 4:

1.*Напряжения параллельны координатным осям:*

$$\vec{\pi}_{ij} \parallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \ \ \mathrm{j}=1,2,3.$$

2.*Компоненты напряжений симметричны:*

$$\pi_{ij} = \pi_{ji}, i, j = 1,2,3. \qquad (17)$$

Отсюда следует логический вывод о том, что *симметричность тензора* напряжений сплошной среды даже в состоянии равновесия *не есть физическое свойство среды*, а является следствием *искусственного* приравнивания главного момента $\vec{M}$ моменту главной силы $\vec{M}_c$, т.е. *математическое условие* равенства этих моментов в том смысле, что если в некоторой точке выполняются одновременно условия (17), то момент главной силы становится равным главному моменту $\vec{M}_C = \vec{M}$, если эти условия (17) не выполняются, то они неравны друг другу: $\vec{M}_c \neq \vec{M}$.

§11. Парадоксы *Бэтчелора*

Очевидно, что *Дж. Бэтчелору* было известно устоявшееся более века в механике сплошной среды утверждение о *симметричности* тензора напряжений. Данный ложный факт *Бэтчелор* решил обосновать следующим образом. Цитируем из /5/ : «…можно показать, что не все девять компонент тензора напряжений независимы. На этот раз рассмотрим моменты различных сил, действующих на жидкость в объеме V произвольной формы; $i-$я компонента полного момента относительно точки O внутри этого объема, возникающего за счет действия поверхностных сил на границе объема, равна

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA,$$

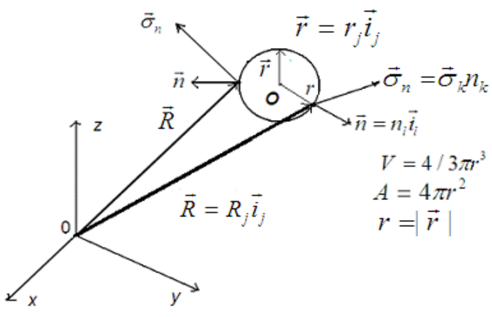
где $\vec{r}$ – радиус-вектор элемента $\vec{n}dA$ относительно точки O. Этот интеграл по замкнутой поверхности A можно преобразовать по теореме Остроградского-Гаусса в интеграл по объему V

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA = \int \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (r_j \sigma_{kl})}{\partial r_l} dV = \int \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l}) dV \quad (1.3.6)$$

Если теперь объем V устремить к нулю таким образом, чтобы конфигурация, создаваемая границей A объема и неподвижной точкой O в нем, сохраняла ту же самую форму, то первый член в правой части равенства (1.3.6) будет стремиться к нулю как объем V, а второй член будет стремиться к нулю быстрее, а именно как $V^{\frac{4}{3}}$. Полный момент массовых сил относительно точки O, приложенный к элементу жидкости, составляет, очевидно, величину порядка $V^{\frac{4}{3}}$, когда V мало, поэтому в объеме V одновременно имеет место также скорость изменения момента количества движения жидкости. Следовательно, интеграл $\int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV$, очевидно, представляет собой величину более высокого порядка по сравнению с другими членами уравнения момента для объема V, и вследствие этого он должен тождественно обращаться в нуль. Это возможно при любом выборе положения точки O и формы объема V, когда величина σ_{ij} представляет непрерывную функцию **x**, если только

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \qquad (1.3.7)$$

всюду внутри жидкости;… Из (1.3.7) следует, что тензор напряжений симметричен, т.е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, и имеет только *шесть независимых* компонент….»



В (1.3.6) утверждение «…Полный момент массовых сил относительно точки O, приложенный к элементу жидкости, составляет, очевидно, величину порядка $V^{\frac{4}{3}}$, когда V мало, поэтому в объеме V одновременно имеет место также скорость изменения момента количества движения жидкости…» подразумевает использование в правой части (1.3.6) уравнений динамики сплошной среды в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} = \rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k ,$$

в результате (1.3.6) принимает дедуктивный вид

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA = \int \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + r_j [\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k]) dV$$

Данные здесь оценки отдельных членов «…порядка $V^{\frac{4}{3}}$ …» легко устанавливаются, если объем V есть сфера радиуса $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} r_j^2}$ с центром в точке O, изображенная на рисунке.

Для сферы $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ и $r = (\frac{3}{4\pi})^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}}$. Чтобы опровергнуть вытекающее из (1.3.7) утверждение *Бэтчелора* о симметричности тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, достаточно рассмотреть данный случай. Очевидно, оценки «…порядка $V^{\frac{4}{3}}$ …» подразумевают применение теоремы о среднем интеграла, вследствие чего имеют место равенства

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA = [\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} A, \int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV = [\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}]_{cp} V,$$

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j [\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k] dV = [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} V$$

После подстановки $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ из (1.3.6) получается

$$[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} 4\pi r^2 = [\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}]_{cp} \frac{4}{3}\pi r^3 +$$
$$+[\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (1)$$

Формула (1) легко обобщается на объем V произвольной формы, если положить поверхность $A = k_A r_{eff}^2$, объем $V = k_V r_{eff}^3$:

$$[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} k_A r_{eff}^2 = [\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}]_{cp} k_V r_{eff}^3 +$$
$$+[\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} k_V r_{eff}^3 \qquad (2)$$

Первый парадокс *Бэтчелора* содержится в формулах (1) и (2).

Проделав очевидные сокращения $4\pi r^2$ и r_{eff}^2, получаем

$$[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} = [\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}]_{cp} \frac{1}{3} r + [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} \frac{1}{3} r \quad , \qquad (3)$$

$$[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} k_A = [\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}]_{cp} k_V r_{eff} + [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} k_V r_{eff} \qquad (4)$$

По *Бэтчелору* «…Если теперь объем V устремить к нулю…», что эквивалентно устремлению к нулю радиусов $r \to 0, r_{eff} \to 0$**,** то из (3) и (4) вытекают соответственно равенства 0=0, т.к. при этом в левых частях $r_j \to 0, \forall j$, **то есть никоим образом не получается формула** (1.3.7) *Бэтчелора*, следовательно, тензор напряжений сплошной среды *не симметричен* $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$.

Второй парадокс *Бэтчелора* состоит в следующем.

Очевидно, $|r_j| = \sqrt{r^2 - \sum_{i=1, i\neq j}^{3} r_i^2} \leq r$. На основании этого в формуле (3) произведем оценку, положив $|r_j| \approx r$, именно при этом получается оценка $V^{\frac{4}{3}}$ по *Бэтчелору* полного момента массовых сил (нижний значок $[...]_{cp}$ опустим):

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kl}n_l 4\pi r^3 \approx \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}\frac{4}{3}\pi r^3 + \varepsilon_{ijk}(\rho\frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)\frac{4}{3}\pi r^4$$

После сокращения $\frac{4}{3}\pi r^3$ имеет место

$$3\varepsilon_{ijk}\sigma_{kl}n_l \approx \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} + \varepsilon_{ijk}(\rho\frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)r$$

Устремим объем V к нулю, то есть r к точке O, тем самым $r \to 0$. Получается

$$3\varepsilon_{ijk}\sigma_{kl}n_l = \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} \tag{5}$$

Но левая часть $3\varepsilon_{ijk}\sigma_{kl}n_l$ формулы (5) по определению не равна нулю: $3\varepsilon_{ijk}\sigma_{kl}n_l \neq 0$, следовательно, формула (1.3.7) *Бэтчелора* не равна нулю $\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} \neq 0$! Тем самым доказана ***несимметричность*** тензора напряжений сплошной среды $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$.

В предыдущих параграфах настоящей книги была дана критика дедуктивного подхода *Седова Л.И., George E. Mase, Лойцянского Л.Г.,* использовавших интегральные формулы

$$\frac{d}{dt}\iiint_V [\vec{R},\vec{v}\rho\delta V] = \iiint_V [\vec{R},\vec{F}\rho\delta V] + \oint\!\!\oint_A [\vec{R},\vec{\sigma}_n\delta A], \tag{6}$$

$$\iiint_V \frac{d}{dt}[\vec{R},\vec{v}\rho\delta V] = \iiint_V [\vec{R},\vec{F}\rho\delta V] + \oint\!\!\oint_A [\vec{R},\vec{\sigma}_n\delta A] \tag{7}$$

для доказательства симметричности тензора напряжений сплошной среды, которая неизбежно вытекает из получающегося из (6) и (7) соотношения

$$[\vec{R},\rho\frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{R},\rho\vec{F}] - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}[\vec{R},\vec{\sigma}_k] = 0, \tag{8}$$

ошибочность которого установлена в **§10,** причем для вывода уравнения (8) из интегральных формул (6) или (7) используется физическая связь $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}$. Более того, радиус-вектор $\vec{R}$

не стремится к нулю, может принимать любые значения $\vec{R} \neq 0$. В дедуктивном подходе *Бэтчелора* из рисунка видно, что для произвольно расположенного объема V имеет место неравенство $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$, и только в случае совпадения точки O с началом системы координат 0 имеет место равенство $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, ибо в этом случае будет $\vec{r} = \vec{R}$.

Основной парадокс *Бэтчелора* состоит в устремлении к нулю произвольного объема V, что равносильно в случае сферы устремлению к нулю радиуса $r \to 0$ или $r_{eff} \to 0$. В дедуктивном методе *Седова Л.И., George E. Mase, Лойцянского Л.Г. и др.* объем V произвольный, причем $\vec{R} \neq 0$. По определению момента любого вектора $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{f}\,]$, если плечо равно нулю $\vec{r} = 0$, то и момент равен нулю: $\vec{M} = 0$, следовательно, использование для доказательства симметричности тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ нулевого момента $\vec{M} = 0$ ошибочно.

§12. Аналог гипотезы *Стокса.* Антисимметричный тензор напряжений

В **§7** был поставлен абсолютно логичный вопрос: **если по *гипотезе Стокса* симметричные напряжения**

$$\pi_{ji(c)} = -(p + 2/3\mu div\vec{v})\delta_{ij} + \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}), i, j = 1,2,3 \qquad (1)$$

вызваны деформационными смещениями

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\delta x_j,$$

то какие же напряжения создают стоящие в ряду *Тейлора* (в конвективном ускорении)

$$\delta v_i = \sum_{j=1}^{3}[\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})]\delta x_j, i=1,2,3 \qquad (2)$$

вращательные смещения $\frac{1}{2}[\ rot\vec{v},\delta\vec{r}\ ]$или $\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\delta x_j$?

Чтобы ответить на этот вопрос выдвигается по аналогии с гипотезой *Стокса альтернативная* гипотеза*:* пусть *касательные напряжения будут пропорциональны компонентам вращательного смещения,* т.е. имеют место *антисимметричные* (кососимметричные) напряжения $\pi^{*}_{ji}=\frac{1}{2}\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, следовательно, *альтернативный* тензор напряжений будет иметь вид

$$\pi_{(Alt)}=-pE+2\mu\hat{S}\,,\pi_{ji(Alt)}=-p\delta_{ij}+\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}),i,j=1,2,3 \qquad (3)$$

Подставляя (3) в уравнения динамики в напряжениях

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{F}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{\pi}_j}{\partial x_j},\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\pi_{ji}}{\partial x_j},i=1,2,3,$$

получаем *альтернативные уравнения* динамики вязкой жидкости:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})],\ \ i=1,2,3 \qquad (4)$$

Нормальные напряжения $\pi_{ii(Alt)}=-p,i=1,2,3$ соответствуют закону *Паскаля.* Представляют интерес следующие факты. При вязкости $\mu=const$ уравнения (4) приводятся к виду

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}-\mu\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}),i=1,2,3, \qquad (5)$$

откуда для несжимаемой жидкости без источников в силу уравнения неразрывности $div\vec{v}\equiv\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0$ получаются **уравнения *Навье*** несжимаемой жидкости

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2},\ \ \mathrm{i}=1,2,3 \qquad (6)$$

Эти же уравнения ***Навье*** получаются и из уравнений *Стокса с симметричными напряжениями* (1)*:*

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}))-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu div\vec{v}),i=1,2,3, \quad (7)$$

и эти же уравнения **(6)** получаются из уравнений динамики *с несимметричными напряжениями Ньютона* **§12:**

$$\pi_{ji(н)}=-[p+(\frac{1}{3}\mu-\mu')div\vec{v}]\delta_{ij}+\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j},i,j=1,2,3, \quad (8)$$

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j})-\frac{\partial}{\partial x_i}[(\mu/3-\mu')div\vec{v}],\ i=1,2,3$$

Но гипотеза *Стокса* (1) приводит к указанным выше парадоксам, ибо, как это доказано, тензор напряжений сплошной среды в общем случае *несимметричен,* а при *альтернативной гипотезе* уравнения (4) в общем случае переменной вязкости $\mu\neq const$ теряют свойство эллиптичности. Эти два обстоятельства подтверждают **адекватность несимметричного тензора напряжений *Ньютона* (8) течениям вязких жидкостей.**

§13. Парадоксальное применение теоремы об изменении момента импульса. *Ошибочность* уравнений *Навье-Стокса*

Напомним, следующую **логическую последовательность** вывода **теоремы об изменении момента импульса**. Здесь это очень важно. А именно, что из закона сохранения импульса отдельных материальных точек (см./7/)

$$\frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt}=\vec{F}_i+\sum_{k=1k\neq i}^{N}\vec{F}_{ik},\quad i=1,...,N \qquad (1)$$

вытекает, во-первых, закон сохранения импульса системы материальных точек (см./7/)

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1k\neq i}^{N}\vec{F}_{ik}, \quad i=1,...,N, \qquad (2)$$

где сумма внутренних сил равна нулю

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1k\neq i}^{N}\vec{F}_{ik}=0,$$

поэтому для системы материальных точек теорема об изменении импульса получается в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i, \quad i=1,...,N, \qquad (3)$$

во-вторых, из (1) вытекает момент импульса для каждой отдельно взятой материальной точки

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i,m_i\vec{v}_i]=[\vec{r}_i,\vec{F}_i]+\sum_{k=1k\neq i}^{N}[\vec{r}_i,\vec{F}_{ik}], \quad i=1,...,N, \qquad (4)$$

суммированием которых получается для моментов системы материальных точек равенство

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i,m_i\vec{v}_i]=\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i,\vec{F}_i]+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1k\neq i}^{N}[\vec{r}_i,\vec{F}_{ik}], i=1,...,N,$$

где сумма моментов внутренних сил равна нулю

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1k\neq i}^{N}[\vec{r}_i,\vec{F}_{ik}]=0$$

В силу чего теорема об изменении момента импульса замкнутой системы материальных точек сформулировано в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i,m_i\vec{v}_i]=\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i,\vec{F}_i], \qquad (5)$$

где $\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i,\vec{F}_i]$ - сумма моментов внешних сил.

Взяв за основу (5), точная формулировка теоремы об изменении момента импульса в элементарном обьеме $\delta\tau$ сплошной среды была дана выше:

$$\frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{F}_i] + \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk}\sigma_k] \qquad (6)$$

Итак, из (1) вытекает (4) и затем (5), *но не наоборот, т.е. из (5) не выводится (1)*. Данную последовательность рассуждений применим к выводу теоремы об изменении момента импульса в сплошной среде в иных формулировках. Выпишем уравнение динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z} \qquad (7)$$

Как было показано в индуктивном методе **§4, (**это уравнение является прообразом уравнения (3)). Умножая (7) векторно на радиус-вектор $\vec{r}$, выведем прообраз теоремы моментов (5):

$$[\vec{r}, \rho\frac{d\vec{v}}{dt}] = [\vec{r}, \rho\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}] \qquad (8)$$

Из эквивалентного преобразования (8)

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \rho\vec{v}] - [\vec{r}, \vec{v}\frac{d\rho}{dt}] = [\vec{r}, \rho\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}] \qquad (9)$$

вытекает теорема об изменении момента импульса $\rho\vec{v}$, приходящегося на единицу объема:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \rho\vec{v}] = [\vec{r}, \vec{v}\frac{d\rho}{dt}] + [\vec{r}, \rho\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}] \qquad (10)$$

Для несжимаемых сплошных сред $\rho = const$ и теорема об изменении момента импульса примет форму

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \rho\vec{v}] = [\vec{r}, \rho\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}], \qquad (11)$$

которая полностью совпадает с определением момента (5).

Импульс индивидуального объема $\delta\tau$ равен $\rho\delta\tau\vec{v} = \delta m\vec{v}$, поэтому теорема об изменении момента импульса из (8) получается для элементарного объема $\delta\tau$ в виде

$$[\vec{r},\rho\delta\tau\frac{d\vec{v}}{dt}]=[\vec{r},\rho\delta\tau\vec{F}]+[\vec{r},\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}]\delta\tau$$

или

$$[\vec{r},\delta m\frac{d\vec{v}}{dt}]=[\vec{r},\delta m\vec{F}]+[\vec{r},\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}]\delta\tau$$

Для сжимаемых сред $\delta\tau=\delta\tau(t)$ и $\frac{d\delta\tau}{dt}=\delta\tau div\vec{v}$, $\frac{d\delta m}{dt}=0$

и это выражение переходит в теорему об изменении момента импульса индивидуального объема $\delta\tau$ для сжимаемых сред

$$\frac{d}{dt}[\vec{r},\delta m\vec{v}]=[\vec{r},\delta m\vec{F}]+[\vec{r},\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}]\delta\tau \qquad (12)$$

Интегрирование (12) по всему объему τ дает выражение

$$\iiint_\tau\frac{d}{dt}[\vec{r},\rho\delta\tau\vec{v}]=\iiint_\tau[\vec{r},\rho\delta\tau\vec{F}]+\iiint_\tau[\vec{r},\frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}]\delta\tau$$

которое в принципе *отличается* от известной формулы /1/

$$\iiint_\tau\frac{d}{dt}\left[\vec{r},\vec{v}\rho\delta\tau\ \right]=\iiint_\tau\left[\vec{r},\vec{F}\rho\delta\tau\ \right]+\oiint_\sigma\left[\vec{r},\vec{\pi}_n\delta\sigma\ \right], \qquad (13)$$

приведенных в книгах *Лойцянского*, *Седова* и др**. Очевидно из правильно сформулированной теоремы об изменении момента импульса (12) никак не следует вывод о симметричности тензора напряжений.** Ошибочность (13) и вытекающих из нее формул исследована в предыдущих параграфах.

Итак, приведенные выше парадоксы и доказательства **несимметричности тензора напряжений** сплошной среды подтверждают **ошибочность гипотезы *Стокса***. Так как именно по этой гипотезе выведены уравнения *Навье-Стокса*, то, следовательно, **уравнения *Навье-Стокса*, точнее, уравнения *Стокса***

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu div\vec{v}), i=1,2,3,$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = div\left(\lambda gradT\right) + \frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 - pdiv\vec{v} - \frac{2}{3}\mu\left(div\vec{v}\right)^2$$

являются ошибочными.

Уравнения вязкой несжимаемой жидкости, построенные ***Навье*** по *несимметричному* тензору напряжений *Ньютона* $\pi_н$,

$$\rho[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v}] + \nabla p = \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{F}, (\nabla,\vec{v}) = 0$$

являются правильными.

§14. Новые уравнения динамики вязкой жидкости с *несимметричным* тензором напряжений *Ньютона*

$$\pi_{ji(н)} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}]\delta_{ji} + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3$$

Подставляя компоненты тензора *Ньютона,* приведенные в §7 в декартовых координатах, в общее уравнение в напряжениях и проецируя на оси координат имеем новые уравнения динамики вязкой жидкости (*Джакупов К.Б.*/8/):

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial u}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x}[(\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \rho F_x,$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial p}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial v}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial y}[(\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \rho F_y,$$

$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial p}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}[(\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \rho F_z$$

из общего уравнения баланса энергий получается уравнение теплопроводности

$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z})=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})-p\,div\vec{v}-(\frac{1}{3}\mu-\mu')(div\vec{v})^2+$$

$$+\mu[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2+$$

$$+(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial z})^2+(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial w}{\partial y})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2] \qquad (2)$$

В несжимаемой жидкости $\rho = const$, $div\vec{v}=0$:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial u}{\partial z})+\rho F_x,$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial v}{\partial z})+\rho F_y,$$

$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial z}= \qquad (3)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial w}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial w}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial w}{\partial z})+\rho F_z,$$

$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z})=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})+$$

$$+\mu[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2+$$

$$+(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial z})^2+(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial w}{\partial y})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2] \qquad (4)$$

Вывод уравнений ***Навье*** несжимаемой жидкости

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,,3 \qquad (5)$$

из уравнений ***Стокса*** при постоянной вязкости

$$\rho\frac{dv_i}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i+\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}), i=1,2,3,$$

как известно, использует уравнение неразрывности $div\vec{v}=0$/1/. Если же в потоке имеются дискретно расположенные источники или стоки с удельными мощностями J, то $div\vec{v}=J$ будет разрывной недифференцируемой функцией, поэтому вывод указанных уравнений в виде (5) невозможен, тогда как (5) из *новых уравнений* (3) получается без использования уравнения неразрывности $div\vec{v}=0$.

В отличие от уравнений *Навье-Стокса* в уравнениях (1) содержится на 9 производных меньше в трехмерном случае и на 4 в двумерном. Кроме того, уравнения (1) удобно записываются в дивергентном виде:

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t}+div(\rho v_i\vec{v})+\frac{\partial p}{\partial x_i}=$$

$$=\rho F_i+div(\mu grad v_i)-\frac{\partial}{\partial x_i}[(\frac{1}{3}\mu-\mu')div\vec{v}], i=1,2,3 \qquad (6)$$

Если в правой части этого уравнения положить $div\vec{v}=0$, получается аналогичная дивергентная запись уравнений (3) несжимаемой жидкости.

Краткое выражение уравнения баланса энергий для несимметричного тензора

$$\rho c_v\frac{dT}{dt}=(\nabla,\lambda\nabla T)+\mu\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2-p(\nabla,\vec{v})-(\frac{1}{3}\mu-\mu')(\nabla,\vec{v})^2 \qquad (7)$$

в дивергентной записи подобно уравнению динамики (6)

$$c_v[\frac{\partial\rho T}{\partial t}+div(\rho T\vec{v})]=div(\lambda grad T)+$$

$$+\mu\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2 - pdiv\vec{v} - (\frac{1}{3}\mu - \mu')(div\vec{v})^2$$

В новых уравнениях динамики привлекают внимание диссипативные члены $div(\mu grad v_i)$, *i=1,2,3*, **которые по структуре** аналогичны диссипативному члену в уравнении баланса энергий $div(\lambda gradT)$, вытекающему из закона *Фурье*. Число *Прандтля* $\Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ связывает вязкость μ с теплопроводностью среды λ, что подчеркивает единую сущность молекулярного переноса субстанций, которыми в одном случае является температура *T,* в других случаях компоненты скорости $v_i, i = 1,2,3$ или концентрации C_m по закону *Фика.*

§15. Новые уравнения динамики вязкой жидкости в цилиндрических координатах с несимметричным тензором напряжений *Ньютона* $\pi_н = -[p + (1/3\mu - \mu')div\vec{v}]E + \mu\bar{S}$

Вывод аналогичных уравнений в цилиндрической и сферической системах координат не вызывает особых затруднений, только надо учесть несимметричность напряжений в этих системах (*Джакупов К.Б.* /8/). В цилиндрической системе для постоянной вязкости $\mu = const$ и плотности уравнения динамики совпадают с известными уравнениями *Навье-Стокса* /3/, в случае переменных вязкости и плотности выводятся подстановкой приведенных в §7 несимметричных напряжений

$$\pi_{r\varepsilon} = \mu(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r}),\ \ \pi_{\varepsilon r} = \frac{\mu}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon},\ \ \pi_{zr} = \mu\frac{\partial v_r}{\partial z},$$

$$\pi_{rz} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial r}, \pi_{z\varepsilon} = \mu\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z},\ \ \pi_{\varepsilon z} = \frac{\mu}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon}.$$

$$\pi_{rr} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\pi_{\varepsilon\varepsilon} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r}{r}),$$

$$\pi_{zz} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

в уравнения динамики сплошной среды (*Лыков А.В.*/3/):

$$\rho(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varepsilon^2}{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\pi_{rr})}{\partial r} +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial \pi_{\varepsilon r}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \pi_{zr}}{\partial z} - \frac{\pi_{\varepsilon\varepsilon}}{r} + \rho F_r,$$

$$\rho(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + v_z\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} + \frac{v_r v_\varepsilon}{r}) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\pi_{r\varepsilon})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \pi_{\varepsilon\varepsilon}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \pi_{z\varepsilon}}{\partial z} + \rho F_\varepsilon,$$

$$\rho(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}) =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial(r\pi_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \pi_{\varepsilon z}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial z} + \rho F_z,$$

уравнение баланса энергий принимает вид

$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}) +$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\lambda\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}) + \Phi_v,$$

$$\Phi_v = \mu[(\frac{\partial v_r}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r}{r})^2 + (\frac{\partial v_z}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v_r}{\partial z})^2 +$$

$$+(\frac{\partial v_z}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon})^2 + (\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r})^2 +$$

$$+(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z})^2 + (\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon})^2] - p\,div\vec{v} - (\frac{1}{3}\mu - \mu')(div\vec{v})^2$$

§16. Новые уравнения динамики вязкой жидкости в сферических координатах с несимметричным тензором напряжений *Ньютона* $\pi_н = -[p + (1/3\mu - \mu')div\vec{v}]E + \mu\bar{S}$

Компоненты несимметричного тензора напряжений по закону *Ньютона* имеют вид (*Джакупов К.Б.*/8 /):

$$\pi_{\phi\phi} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu(\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varepsilon ctg\,\varepsilon}{r}),$$

$$\pi_{rr} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\pi_{\varepsilon\varepsilon} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}] + \mu(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \frac{v_r}{r}),$$

$$\pi_{\phi r} = \mu\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}, \pi_{r\phi} = \mu r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v_\phi}{r}), \pi_{r\varepsilon} = \mu(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r}),$$

$$\pi_{\varepsilon r} = \frac{\mu}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon}, \quad \pi_{\phi\varepsilon} = \mu\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\phi}, \pi_{\varepsilon\phi} = \mu\frac{\sin\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\frac{v_\phi}{\sin\varepsilon}),$$

$$div\vec{v} \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial(v_\varepsilon\sin\varepsilon)}{\partial\varepsilon},$$

подставляются в уравнения динамики в напряжениях (*Лыков А.В.* /3/):

$$\rho(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon} + \frac{v_\phi}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\varepsilon^2 + v_\phi^2}{r}) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\pi_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial(\pi_{\varepsilon r}\sin\varepsilon)}{\partial\varepsilon} +$$

$$+ \frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial\pi_{\phi r}}{\partial\phi} - \frac{\pi_{\varepsilon\varepsilon} + \pi_{\phi\phi}}{r} + \rho F_r,$$

$$\rho(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \frac{v_\phi}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\phi} + \frac{v_r v_\varepsilon}{r} - \frac{v_\phi^2 ctg\,\varepsilon}{r}) =$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\pi_{r\varepsilon})}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial(\pi_{\varepsilon\varepsilon}\sin\varepsilon)}{\partial\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial\pi_{\phi\varepsilon}}{\partial\phi}+\frac{\pi_{r\varepsilon}+\pi_{\varepsilon r}}{r}-\frac{ctg\,\varepsilon}{r}\pi_{\phi\phi}+\rho F_{\varepsilon},$$

$$\rho(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_{\phi}}{\partial r}+\frac{v_{\varepsilon}}{r}\frac{\partial v_{\phi}}{\partial\varepsilon}+\frac{v_{\phi}}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_{\phi}}{\partial\phi}+\frac{v_{\phi}v_r}{r}+\frac{v_{\varepsilon}v_{\phi}}{r}ctg\,\varepsilon)=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\pi_{r\phi})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{\varepsilon\phi}}{\partial\varepsilon}+\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial\pi_{\phi\phi}}{\partial\phi}+$$

$$+\frac{\pi_{r\phi}+\pi_{\phi r}}{r}+\frac{2ctg\,\varepsilon}{r}(\pi_{\varepsilon\phi}+\pi_{\phi\varepsilon})+\rho F_r,$$

в уравнении баланса энергий для несимметричного тензора

$$\Phi_v=\mu\{(\frac{\partial v_r}{\partial r})^2+(\frac{1}{r}\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial\varepsilon}+\frac{v_r}{r})^2+(\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_{\phi}}{\partial\phi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_{\varepsilon}ctg\,\varepsilon}{r})^2+$$

$$+[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v_{\varepsilon}}{r})]^2+(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon})^2+[\frac{\sin\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\frac{v_{\phi}}{\sin\varepsilon})]^2+(\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial\phi})^2+$$

$$+(\frac{1}{r\sin\varepsilon}\frac{\partial v_r}{\partial\phi})^2+[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v_{\phi}}{r})]^2\}-p\,div\vec{v}-(\frac{1}{3}\mu-\mu')(div\vec{v})^2$$

Примечание. В силу произвольности выбора второго коэффициента вязкости для $\mu'=\mu/3$ данные уравнения сократятся не менее чем на 12 производных.

Литература

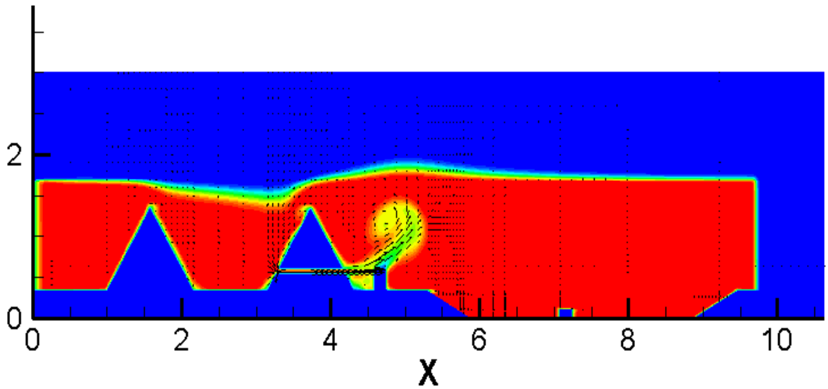
1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: “Наука”, 1973г..С.847.

2. Седов Л.И. Механика сплошной среды.- Т.1. М.: “Наука”, 1973г..С.536.

3. Лыков А.В.Тепломассобмен. - М.: «Энергия»,1972г. С.560.

4. George E. Mase. Theory and Problems of Continium Mechanics. Schaum’s Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANI. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama 1970.

5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: «Мир», 1973г. С.763.
6. Шлихтинг Г.Теория пограничного слоя. - М.. Изд-во “Наука”. 1974г.С.711.
7. Савелъев И.В.Курс общей физики.- Т.1. М.: “Наука”, 1977г.
8. Джакупов К.Б. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэро-термодинамики.-Алматы: Изд-во КазНУ им.Аль-Фараби, 2004г. С.246.
9. Ландау Л. Д., Лифщиц Е.М. Теоретическая физика.Т.6. Гидродинамика. - М.: “Наука”, 1973г. С.742.
10. Джакупов К.Б. О несимметричности тензора напряжений// Междунар. науч.конф. «Пробл.теор. прикл.мех.» Алматы, 1-2 марта 2006г., посвящ. 75-лет. акад. Джолдасбекова У.А.
11. Джакупов К.Б. О первой теореме Гельмгольца// Междунар. науч.конф. «Пробл.теор. прикл.мех.» Алматы, 1-2 марта 2006г., посвящ. 75-лет. акад. Джолдасбекова У.А.
12. Джакупов К.Б. Тензор напряжений сплошной среды не симметричен// Всероссийская конференция по математике и механике, посвященной 60-летию механико-математического факультета Томского университета, 22-24 сент.2008г.,г.Томск.
13. Джакупов К.Б. Новые уравнения динамики вязкой жидкости // Всероссийская конференции по математике и механике, посвященной 60-летию механико-математического факультета Томского университета, 22-24 сент.2008г.,г.Томск.
14. Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambr. Univ. Press. 1967.



Гл.-2. ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ И УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-КОШИ-ЛАМЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§1. Парадоксы теории деформаций

На стр.64 в «Механике сплошной среды, т.1» *Л.И.Седова,* в параграфе **«О зависимости векторов базиса сопутствующей системы от времени» утверждается:** «**…**Действительно, при движении деформируемого тела расстояния между его точками *M* и *M'* меняются. Координатные линии сопутствующей системы координат деформируются, ***и векторы*** **базиса** $\hat{Э}_i$ ***меняются со <u>временем</u> так, что меняются и их величины и углы между ними****…*» **.** Напомним, что в «Основном курсе теоретической механики, ч.1» *Н.Н.Бухгольца* для переменного вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, с изменяющимся во времени базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ подвижной связанной с телом сопутствующей системы координат *Oxyz*, производная по времени определяется так:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt},$$

далее по формуле *Эйлера* $\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}\,], \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}\,], \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}\,]$,

$\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения. Сокращая на *dt,* получаем

$$d\vec{a} = da_x\vec{i} + da_y\vec{j} + da_z\vec{k} + a_x d\vec{i} + a_y d\vec{j} + a_z d\vec{k} \qquad (1)$$

Поэтому на стр. 65 в том же параграфе **«О зависимости векторов базиса сопутствующей системы от времени»** цитируемой книги *Седова* /1/ выражения

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\vec{Э}}_i \text{ и } d\vec{r}\,' = d\xi^i \vec{Э}_i' \qquad (2)$$

противоречат формуле (1), следовательно, должны быть заменены на соответствующие формуле (1) выражения

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\vec{Э}}_i + \xi^i d\hat{\vec{Э}}_i,\ d\vec{r}\,' = d\xi^i \vec{Э}_i' + \xi^i d\vec{Э}_i' \qquad (3)$$

со всеми вытекающими отсюда последствиями в теории деформаций. Собственно говоря, сомнительность формулы (2) с точки зрения формулы (1) подтверждается положением о том, что

«… ***и векторы базиса $\hat{\text{э}}_{\rm i}$ меняются со <u>временем</u> так, что меняются и их величины и углы между ними***…», ибо $\vec{\text{э}}_i^{\,\cdot}$, i=1,2,3 – векторы базиса в начальный момент времени t_0, $\hat{\vec{\text{э}}}_i$, i=1,2,3 - векторы базиса в текущий момент времени *t, а также* $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$, как сказано, переменные величины.

По *Седову* /1/ для представлений (2) положено

$$
\begin{aligned}
|d\vec{r}| &= ds = \sqrt{\hat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j}, \hat{g}_{ij} = \hat{\vec{\text{э}}}_{\rm i} \cdot \hat{\vec{\text{э}}}_{\rm j}, \\
|d\vec{r}\,'| &= ds' = \sqrt{g_{ij}^{\cdot} d\xi^i d\xi^j}, g'_{ij} = \vec{\text{э}}_i^{\,\cdot} \cdot \vec{\text{э}}_j^{\,\cdot}
\end{aligned} \qquad (4)
$$

очевидно, для *правильных* представлений (3) вместо (4) получаются совершенно иные выражения, так как будет

$$
\begin{aligned}
|d\vec{r}| &= (d\xi^i \hat{\vec{\text{э}}}_{\rm i} + \xi^i d\hat{\vec{\text{э}}}_{\rm i}, d\xi^i \hat{\vec{\text{э}}}_{\rm i} + \xi^i d\hat{\vec{\text{э}}})^{\frac{1}{2}}, \\
|d\vec{r}\,'| &= (d\xi^i \vec{\text{э}}_i^{\,\cdot} + \xi^i d\vec{\text{э}}_i^{\,\cdot}, d\xi^i \vec{\text{э}}_i^{\,\cdot} + \xi^i d\vec{\text{э}}_i^{\,\cdot})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \qquad (5)
$$

На основании (4) в дальнейшем выводится формула /1/:

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\nabla}_i \dot{w}_j + \dot{\nabla}_j \dot{w}_i - \dot{\nabla}_i \dot{w}_k \dot{\nabla}_j \dot{w}_k) \qquad (6)
$$

Произведение производных $\dot{\nabla}_i \dot{w}_k \dot{\nabla}_j \dot{w}^k$ в (6) *принято считать малой величиной* и оно отбрасывается, тем самым (6) упрощается до следующего известного выражения тензора перемещений

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right), \quad i, j = 1,2,3, \qquad (7)
$$

Если $\dot{\nabla}_i \dot{w}_k \dot{\nabla}_j \dot{w}^k$ *не мало*, то (7) не имеет места. Очевидно, в силу (5) вместо (6) и (7) будут совершенно *другие соотношения*. (С точки зрения здравого смысла формула (6) абсурдна, *если бы* w_j и x_j имели различные размерности, например, $[w_j]$ =m/c, а $[x_j]$=m). Совершенно аналогичное обстоятельство имеет место быть и в книге *Дж. Мейза* «Теория и задачи механики сплошных сред», если привести обозначения

Мейза в соответствие с обозначениями *Седова:* $d\mathbf{x}= d\vec{r}$, $d\mathbf{X}= d\vec{r}\,'$, $\xi^1 = x_1, \xi^2 = x_2, \ \xi^3 = x_3, \ \varepsilon_{ij} = E_{ij}, w_i = u_i$, $\boldsymbol{w}$=$\boldsymbol{u}$ и т.д. Формула (6) в /2/ имеет вид

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{8}$$

Таким образом, замечания (2) и (3), (5) относятся и к выводу формулы (8). Считается, что в (8) градиенты малы по сравнению с единицей и их можно отбросить. Собственно говоря, и это совершенно очевидно, отбрасывание градиентов $\dot{\nabla}_i \dot{w}_k \dot{\nabla}_j \dot{w}^k$ и $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}$ связано с *подгонкой* (7) к *ложной симметричности тензора напряжений сплошной среды.* Тензор напряжений сплошной среды в общем случае несимметричен (*см.* **гл.1**).

§2. Альтернативное представление относительного перемещения *d*u

В обозначениях *Дж.Мейза /2/* вектор относительного перемещения *d***u** (в книге *Л.И.Седова* /1/ обозначено $d\boldsymbol{w}$) вводится как разность векторов начального положения точки Q_0 и конечного положения той же точки P_0 : *d***u**=$\mathbf{u}^{(Q_0)}$ -$\mathbf{u}^{(P_0)}$.

Разложение $\mathbf{u}^{(P_0)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки P_0 дает

$$d\mathbf{u}=\mathbf{K}d\mathbf{x},$$

или в покомпонентной записи (неполный дифференциал)

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j\,,\ i=1,2,3 \tag{1}$$

(по индексу *j* производится суммирование от 1 до 3).
Обратим внимание на то, что тензор **К несимметричен:**

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

В /1/-/3/ по традиции разложение (1) приводится к виду

$$du_i = [\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i})]dx_j\,, \qquad (3)$$

или в обозначениях *Седова* /1/

$$dw_i = [\frac{1}{2}(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i})]dx_j$$

Первая сумма в (3) представляется *эйлеровым тензором линейной деформации*

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Это симметрическая матрица; вторая часть в (3) есть *компо-понента эйлерова тензора линейного поворота*

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \qquad (5)$$

Они же являются и компонентами *антисимметричного* тензора

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}) & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, ряд Тейлора представляется двояко в виде (1) и (3):

$$d\mathbf{u}=\mathbf{K}d\mathbf{x} \quad \text{и} \quad d\mathbf{u}=\mathbf{E}d\mathbf{x}+\frac{1}{2}[\mathrm{rot}\mathbf{u},d\mathbf{x}] \tag{6}$$

или с помощью антисимметричной матрицы в виде

$$d\mathbf{u}=\mathbf{E}d\mathbf{x}+\mathbf{R}d\mathbf{x}] \tag{7}$$

Кроме (6), (7) имеется бесконечное число различных форм представлений ряда *Тейлора* (1). С этой целью введем семейство однопараметрических матриц

$$\mathbf{C}_b=\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{1}{b}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), & \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{1}{b}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{1}{b}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), & \left(\frac{b-1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{1}{b}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right), & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Ряд *Тейлора* (1) с применением матриц (8) имеет бесконечное число альтернативных или универсальных представлений

$$d\mathbf{u}=\mathbf{C}_b\,d\mathbf{x}+\frac{b-1}{b}[\mathrm{rot}\mathbf{u},d\mathbf{x}],\quad b\neq 0,|b|<\infty \tag{9}$$

При *b=1 получается* $\mathbf{C}_1$=**К**, при *b=2 получается* $\mathbf{C}_2$=**E** и т.д.

§3. Парадоксы гипотезы *Навье-Коши-Ламе*

Для применения закона *Гука* в теории твердого деформируемого тела используется *гипотеза Навье-Коши-Ламе* /2/ о том, что в ряде *Тейлора* (или неполного дифференциала)

$$du_i = [\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i})]dx_j \qquad (1)$$

для определения компонент тензора напряжений достаточно только первой половины этого ряда

$$du_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})dx_j, \qquad (2)$$

второй половиной ряда пренебрегается, полагая

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) = 0, \qquad (3)$$

хотя оба эти выражения состоят из одних и тех же градиентов.

В результате по гипотезе *Навье-Коши-Ламе* закон *Гука* был определен и щироко используется в виде

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij} div\vec{u} + 2\mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}), i, j = 1,2,3, \qquad (4)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}$, $\lambda, \mu -$коэффициенты Ламе, $\pi_{ij} = \pi_{ji}$. **Тем самым по (4) утверждается, что силы, деформирующие тело, создают только *линейную деформацию* E*d*x. По гипотезе *Навье-Коши-Ламе эйлеров линейный поворот* приравнивается к нулю** $\frac{1}{2}$[rot**u,***d***x**]=**R***d***x=0,** что конкретно выражается в силу (3) как равенство нулю ротора перемещения (см.*Лурье* /3/):

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u}=\mathbf{0} \qquad (5)$$

(В частности, условие разрешимости *А.Н.Коновалова* имеет вид /4/ $\int_D rot\vec{u}dM = 0$)

Следовательно, формула (1) обрезается и принимает укороченный вид (2), далекий от ряда *Тейлора*:

$$d\mathbf{u}=\mathbf{E}d\mathbf{x} \qquad (6)$$

Разумеется, указанный парадокс связан с подгонкой (4) к формуле эйлерова тензора конечных деформаций

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right),$$

в котором по теории малых деформаций отбрасываются произведения $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$, могушие быть и совсем немалыми, и предлагается сомнительная формула

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Итак, если следовать гипотезе *Навье-Коши-Ламе,* по которой rot**u=0,** то из представления ряда *Тейлора* в универсальной форме

$$d\mathbf{u} = \mathbf{C}_b\, d\mathbf{x} + \frac{b-1}{b}[\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, d\mathbf{x}],\ \ b \neq 0, |b| < \infty \qquad (7)$$

выпадает второе слагаемое и, исходя из выражения

$$d\mathbf{u} = \mathbf{C}_b\, d\mathbf{x}, \qquad (8)$$

закон *Гука* по логике должен быть определен в виде

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij} div\vec{u} + b\mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{1}{b}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{b-1}{b}\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\ b \neq 0, |b| < \infty \qquad (9)$$

В формулах (4) *Навье-Коши-Ламе* тензор напряжений симметричен, в формулах (7) имеет место бесконечное число несимметричных тензоров напряжений при $b \neq 2$. Формула (7) есть ряд *Тейлора* при любых значениях $b \neq 0$, в том числе и для $b = 1$. Закон *Гука* (9) сформулирован для представления (8), получающегося из (7) при rot**u=0, и для** $b = 1$ принимает вид

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij} div\vec{u} + \mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\ i, j = 1,2,3, \qquad (10)$$

а так как **при** $b = 1$ имеет место быть **$\mathbf{C}_1$=К, то закон *Гука* (10)** соответствует полному ряду *Тейлора* d**u=К**d**x!**

Главный парадокс гипотезы *Навье-Коши-Ламе* состоит в следующем. Согласно этой гипотезе имеют место эквивалентные равенства (3) или (5), откуда вытекают равенства нулю компонент ротора

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=0, i, j=1,2,3 \text{ или } \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, i, j=1,2,3 \qquad (11)$$

Напряжения (4), построенные по гипотезе *Навье-Коши-Ламе,* можно представить так

$$\pi_{ji}=\lambda\delta_{ij}div\vec{u}+2\mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}),$$

которые в силу равенств (11) переходят к формулам (10):

$$\pi_{ji}=\lambda\delta_{ij}div\vec{u}+\mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ i, j=1,2,3 \qquad (12)$$

и являются симметричными в силу вторых равенств (11).

Снова получается закон *Гука* в форме (10)! **Главный парадокс заключается еще и в том, что решения уравнений *Навье-Коши-Ламе***

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\rho_0\vec{F}+(\lambda+\mu)graddiv\vec{u}+\mu\Delta\vec{u} \qquad (13)$$

должно удовлетворять равенствам (11). Исследуем этот вопрос. С этой целью применим операцию rot к уравнению (13):

$$\rho_0\frac{\partial^2 rot\vec{u}}{\partial t^2}=\rho_0 rot\vec{F}+\mu\Delta rot\vec{u}, \qquad (14)$$

т.к. $rotgraddiv\vec{u}\equiv 0$.

***Теорема 1.* В нестационарных задачах теории упругости $rot\vec{u}\neq 0$, следовательно, гипотеза *Навье-Коши-Ламе* (4) неверна, тензор напряжений не может быть симметричным.**

Очевидно, для $rot\vec{F}\neq 0$ уравнение (14) имеет ненулевое решение $rot\vec{u}\neq 0$, поэтому гипотеза *Навье-Коши-Ламе* неверна, а это значит, что тензор напряжений надо определять по формуле (10) с несимметричным тензором напряжений. Пусть $rot\vec{F}=0$. Тогда уравнение (14) примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 rot\vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta rot\vec{u} \qquad (15)$$

Это волновое уравнение имеет общее ненулевое решение

$$rot\vec{u} = (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \sqrt{3\mu}\pi t)\vec{i}_1 +$$
$$+ (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \sqrt{3\mu}\pi t)\vec{i}_2 + \qquad (16)$$
$$+ (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \sqrt{3\mu}\pi t)\vec{i}_3 \neq 0$$

следовательно, гипотеза *Навье-Коши-Ламе* снова неверна!

Рассмотрим уравнение упругого равновесия, полученное по гипотезе *Навье-Коши-Ламе*:

$$\rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) graddiv\vec{u} + \mu \Delta \vec{u} = 0 \qquad (17)$$

Операция ротор (17) дает уравнение эллиптического типа относительно $rot\vec{u}$:

$$\rho_0 rot\vec{F} + \mu \Delta rot\vec{u} = 0 \qquad (18)$$

Теорема 2. **Если $rot\vec{F} \neq 0$, то уравнение (18) имеет ненулевое решение $rot\vec{u} \neq 0$, следовательно, в задачах упругого равновесия гипотеза *Навье-Коши-Ламе* неверна, тензор напряжений не может быть симметричным.**

Доказательство очевидное.

Пусть теперь массовые силы таковы, что $rot\vec{F} = 0$. Тогда уравнение (18) перейдет в однородное эллиптическое уравнение

$$\Delta rot\vec{u} = 0,$$

которое имеет нулевое решение

$$rot\vec{u} = 0 \qquad (19)$$

Теорема 3. **В задачах упругого равновесия гипотеза *Навье - Коши-Ламе* верна, если $rot\vec{F} = 0$, т.е. $rot\vec{u}=0$, следовательно, тензор напряжений может быть симметричным. Вектор перемещения имеет потенциал.**

Доказательство уже дано в виде (19). Потенциал вводится по формуле

$$\vec{u} = grad\Phi, \qquad (20)$$

ибо $rot\vec{u} = rotgrad\Phi = 0$. И в этом случае тензор напряжений определяется в виде (10), симметрия имеет место из-за (19), что приводит к равенствам (11).

Итак, согласно теоремам 1,2,3 тензор напряжений должен иметь вид (10): $\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij} div\vec{u} + \mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, i, j=1,2,3.

По гипотезе *Навье-Коши-Ламе* **силы, действующие на тело,** создают только **линейную деформацию E*d*x ,** в результате получается, как сказано, *искаженное* выражение

$$du_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})dx_j, \quad d\mathbf{u}=\mathbf{E}d\mathbf{x},$$

ничего общего не имеющего с рядом *Тейлора* (1) *d***u=К***d***x**. Отказ от гипотезы *Навье-Коши-Ламе* означает, что если исходить из формулы ряда *Тейлора*

$$d\mathbf{u}=\mathbf{E}d\mathbf{x}+\frac{1}{2}[\mathrm{rot}\mathbf{u}, d\mathbf{x}],$$

то *необходимо* учитывать также силы напряжений, вызывающие и *эйлеров линейный поворот*. С этой целью обозначим через $\overset{*}{\pi}_{ji}$ - напряжения, пропорциональные *эйлеровым линейным деформациям,* через $\overset{**}{\pi}_{ji}$ - напряжения, пропорциональные *эйлеровым линейным поворотам:*

$$\overset{*}{\pi}_{ji} = \frac{\mu}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}), \quad \overset{**}{\pi}_{ji} = \frac{\mu}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{21}$$

По закону *Гука* суммарная сила будет равна

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij} div\vec{w} + \overset{*}{\pi}_{ji} + \overset{**}{\pi}_{ji}$$

После подстановки $\overset{*}{\pi}_{ji}$ и $\overset{**}{\pi}_{ji}$ получается

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij} div\vec{u} + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \; i, j=1,2,3, \tag{22}$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}$, $\lambda, \mu -$ коэффициенты *Ламе.*

Тензор напряжений в (22) ***несимметричен*** $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}, i \neq j$, ибо здесь не предполагается заранее равенство нулю (11) компонент вектора rot**u**. Итак, тензор напряжений (22) снова совпадает с тензорами (12) и (10).

Несимметричность тензора напряжений в динамике сплошной среды доказано автором в **гл.1.** Данное там строгое доказательство легко переносится и на деформируемые тела в теории упругости. В монографии *Лурье А.И.* /3/ и др. симметричность тензора напряжений в теории упругости устанавливается для состояния упругого равновесия

$$\frac{\partial \vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_z}{\partial z} + \rho \vec{F} = 0 \qquad (22a)$$

Аналогично *Седову и Лойцянскому* составляется уравнение момента сил в *неправильной* форме

$$\iiint_\tau [\vec{r}, \vec{F}\rho\delta\tau] + \oint\!\!\oint_\sigma [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta\sigma] = 0,$$

из которого в силу получается соотношение

$$\frac{\partial [\vec{r}, \vec{\pi}_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\vec{r}, \vec{\pi}_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\vec{r}, \vec{\pi}_z]}{\partial z} + [\vec{r}, \rho \vec{F}] = 0, \qquad (23)$$

на основании чего *Лурье* и др. авторы делают вывод о *симметричности* тензора напряжений в упругой среде. Критика такого *дедуктивного* метода дана в **гл.1.** Там же дано обоснование *правильной* формулы момента сил в виде

$$\iiint_\tau [\vec{r}, \vec{F}\rho\delta\tau] + \iiint_\tau [\vec{r}, \oint\!\!\oint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma] = 0,$$

откуда получается не совпадающее с (23) соотношение

$$[\vec{r}, \frac{\partial \vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_z}{\partial z}] + [\vec{r}, \rho \vec{F}] = 0,$$

из которого следует уравнение упругого равновесия (22а), но не следует *симметричность тензора напряжений.*

Поэтому надо положить, опираясь на вышеприведенные факты, что и касательные напряжения $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}$, $j \neq i$ (в декартовых координатах $\pi_{xy} \neq \pi_{yx}$, $\pi_{xz} \neq \pi_{zx}, \pi_{zy} \neq \pi_{zy}$**)** в общем случае не равны друг другу**.** Равенство касательных напряжений - симметричность тензора напряжений - в какой-либо точке сплошной среды, т.е. выполнение равенств (11) $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, i,\ j=1,2,3$ попросту означает тот факт, согласно результатам **§8 гл.-1**, что в данной точке момент главной (результирующей) силы совпал с главным моментом сил, т.е. с результирующим моментов сил.

Таким образом, само собою назрела необходимость пересмотра уравнений динамики деформируемого твердого тела, иначе говоря, уравнений *Навье-Коши-Ламе.*

§4. Парадоксы закона *Гука* для симметричного тензора напряжений *Навье-Коши-Ламе*

Рассмотрим, например, уравнения упругого равновесия (17) **§3** для двумерного случая, когда сила $\vec{F} = 0\vec{i}_1 + 0\vec{i}_2 + F_3\vec{i}_3$ перпендикулярна плоскости (x_1, x_2), и запишем (17) в проекциях

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_k} div\vec{u} + \mu\Delta u_k = 0, k = 1,2,3, \qquad (24)$$

или более подробно для двумерной задачи

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) + \mu\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) = 0, k = 1,2 \quad (25)$$

Для бесконечного числа перемещений, т.е. решений системы уравнений (25), **симметричные касательные напряжения гипотезы *Навье-Коши-Ламе* имеют нулевые значения**, т.е. во всех точках тела равны нулю

$\pi_{ij} = \pi_{ji} = \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) = 0, i, j = 1,2,$ **в то время как нормальные напряжения отличны от нуля** $\pi_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} \neq 0,$

Ограничимся приведением небольшого перечня перемещений, в которых этот факт имеет место (ради краткости, обозначено $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, u_3 \equiv w, x_3 \equiv z)$:

1*) u=F(sin* k_1x *cos* k_1y *), v=F(-cos* k_1x *sin* k_1y *),*

2) $u= U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y)$,

$v= U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y)$,

3) $u=W(-\cos k_3 x \sin k_3 y)$,$v=W(\sin k_3 x \cos k_3 y)$,

4) $u=Q(\sin k_4 x \ \sin k_4 y)$,$v=Q(\cos k_4 x \ \cos k_4 y)$,

5) $u=T(\sin k_5 x \sin k_5 y)$,$v=T(\cos k_5 x \ \cos k_5 y)$, (26)

6) $u=M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x)$,

$v=M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x)$,

7)$u=S(e^{k_7 (x+y)})$, $v=-S(e^{k_7 (x+y)})$,

для трехмерных перемещений при отсутствии массовых сил

8)u=D(($e^{k_8 y}$ - $e^{k_8 z}$)$e^{k_8 x}$), v=D(($e^{k_8 z}$ - $e^{k_8 x}$) $e^{k_8 y}$), (27)

w=D(($e^{k_8 x}$ - $e^{k_8 y}$)$e^{k_8 z}$), где коэффициенты $k_i = const$, $i = 1,2,3,4,5,6,7,8,$ выбираются произвольно из бесконечного интервала $-\infty < k_i < +\infty$. Стоящие здесь дифференцируемые функции F,U,W,Q,T,M,S,D также произвольны в выборе. Очевидно, из указанного перечня можно образовать новые любые линейные комбинации типа u=F+U, v=F+U и т.д. Поля 1-7 в (26) соответствуют плоским перемещениям, являются решениями уравнений (25), т.к. обращают дивергенцию в нуль $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, поля перемещений 8) в (27) обращают трехмерную дивергенцию в нуль $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, симметричные касательные напряжения равны нулю $\pi_{ji} = \mu(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = 0, i \neq j, \forall(i, j)$, нормальные напряжения не равны нулю $\pi_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} \neq 0, i = 1,2,3.$

Следует заметить, что частные решения (26), (27) уравнений упругого равновесия (24), являются также частными решениями уравнений с **несимметричным тензором** напряжений $\lambda \frac{\partial}{\partial x_k} div\vec{u} + \mu\Delta u_k = 0, k = 1,2,3$, но здесь *несимметричные* касательные напряжения $\pi_{ji} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \neq 0, \pi_{ij} \neq \pi_{ji}, i \neq j$ уже не равны нулю, что вполне физично.

§5. Уравнения теории упругости для несимметричного тензора напряжений

Уравнения теории упругости в форме *Навье-Коши-Ламе* для *симметричного* тензора напряжений даны в /1/-/3/:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) graddiv\vec{u} + \mu\Delta\vec{u}\ , \qquad (1)$$

$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ - вектор перемещения, $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w$.

Выше было обосновано, что если действующие на частицы деформируемого тела силы перемещают их на d**u=K**d**x,** то соответствующие компоненты тензора напряжений должны быть по закону *Гука* пропорциональными компонентам **несимметричного тензора перемешений K**.

Закон *Гука* для *несимметричного* тензора напряжений дан в **§2**

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij} div\vec{u} + \mu\varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3 \qquad (2)$$

Уравнения динамики получаются подстановкой (2) в уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j}, i = 1,2,3$$

и для несимметричного тензора напряжений (2) получается

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda graddiv\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} \qquad (3)$$

Проекции (3) на оси координат образуют систему из 3-х скалярных уравнений гиперболического типа

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}), \quad (4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) + \mu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2})$$

Далее излагаются численные методы решения задач теории упругости в перемещениях.

Примечание. Условиями совместности компонент несимметричного тензора перемещений являются

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial x_j \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{i\nu}}{\partial x_\mu \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial x_i \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{j\mu}}{\partial x_\nu \partial x_i} -$$
$$- \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial x_j \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{i\mu}}{\partial x_\nu \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial x_i \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{j\nu}}{\partial x_\nu \partial x_i} = 0$$

Литература

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред.-М.:Мир, 1974г., 318с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды,т.1- М.:«Наука»,1973г.
3. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: «Наука»,1970г., 984с.
4. Коновалов А.Н. Численное решение задач теории упругости.- Новосибирск: НГУ, 1969г. С.91.
5. Джакупов К.Б. О несимметричности тензора напряжений// Междунар. науч.конф. «Пробл.теор. прикл.мех.» Алматы, 1-2 марта 2006г., посвящ. 75-лет. акад. Джолдасбекова У.А.