ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

# МЕСТО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КАК НАУКИ В ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ НА ММФ ТГУ

Томск — 2008

УДК 517

Рекомендовано к печати
Советом механико-математического факультета ТГУ

Декан ММФ В.Н.Берцун

# МЕСТО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КАК НАУКИ В ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ НА ММФ ТГУ

Одобрено и рекомендовано к печати на заседании кафедры математического анализа, протокол № 10 от 23.05.2008 г.

Заведующий кафедрой И.А. Александров

Ответственные за выпуск:
И.А. Александров, С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков

Для студентов первого курса механико-математического факультета Томского государственного университета.

Книга содержит краткие исторические сведения о преподавании математического анализа в Томске, программу и учебный план курса “Математический анализ”, список литературы и путеводитель по нему, информацию о кафедре математического анализа ТГУ, статьи известнейших математиков и другую полезную информацию.

В обсуждении содержания и подготовке материала книги принимали участие все сотрудники кафедры математического анализа.

# Содержание

# *Дорогие первокурсники!*

*Сотрудники кафедры математического анализа рады приветствовать вас, пришедших на механико-математический факультет, и поздравить с началом трудного и интересного пути, ведущего в самую замечательную науку – математику!*

*Книга, которую вы держите в руках, даст вам возможность подробнее познакомиться и с миром математики, и с нашей кафедрой. По замыслу сотрудников кафедры, она может надолго стать вашим помощником в путешествии по лабиринтам математической науки и, прежде всего, по одному из основных ее разделов – математическому анализу. Она познакомит вас с фундаментальными проблемами, стоящими перед учеными, с оригинальными мнениями о самой математике, поможет ориентироваться в большом количестве математической литературы. В книге вы найдете подробное содержание курса математического анализа, который вам предстоит изучать в течение четырех семестров, и познакомиться с аналогичными программами двух предыдущих потоков. Перечитывая материалы книги, по мере приобретения знаний вы каждый раз будете видеть в ее советах что-то новое, а также находить подсказки по выбору специализации и тем для исследований на старших курсах.*

*Мы надеемся на вашу заинтересованность в получении знаний, готовность преодолеть все препятствия на этом пути, на ваше трудолюбие и терпение. Желаем никогда не пожалеть о сделанном выборе, оставаться верными ему всегда.*

*Каждый из нас приложит все усилия, чтобы помочь вам стать хорошими специалистами, показать вам красоту и строгость математических понятий, теорем, теорий, проникнуться духом лучших представителей математической науки.*

*Вам продолжать и развивать математическую науку России!*

*Успехов вам в этом трудном и почетном деле!*

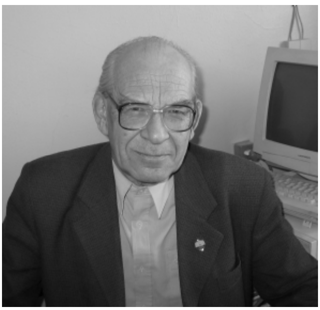
Игорь Александрович *Александров*
Татьяна Вениаминовна *Емельянова*
Нина Алексеевна *Исаева*
Татьяна Васильевна *Касаткина*
Сергей Анатольевич *Копанев*
Лидия Сергеевна *Копанева*
Элеонора Ноновна *Кривякова*
Елена Петровна *Кузнецова*
Юрий Алексеевич *Мартынов*
Герман Гаврилович *Пестов*
Геннадий Васильевич *Сибиряков*
Борис Васильевич *Соколов*

И.А. Александров

Е.П. Кузнецова

Г.Г. Пестов

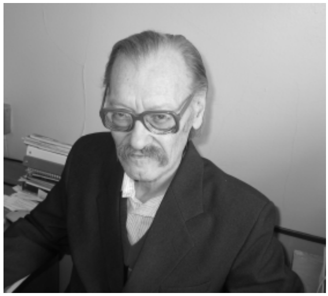
Н.А. Исаева



Ю.А. Мартынов

Т.В. Емельянова

Э.Н. Кривякова



Г.В. Сибиряков

Т.В. Касаткина

С.А. Копанев

Л.С. Копанева

Б.В. Соколов

Математика скучна? – Так это миф.<br>Этот мир по-настоящему красив.<br>Из факультетского фольклора.

# Дорогие студенты!

Вы приступаете к изучению курса математического анализа, самого продолжительного и самого объемного курса в вашем учебном плане. Вы выбрали наш факультет, значит, согласны с тем, что мир математики по-настоящему красив. Порой эта красота видна сразу, порой нужны титанические усилия, чтобы увидеть её. Современная математика похожа на дерево с хорошо развитой кроной, опирающейся на мощный ствол. Этот ствол (или, по крайней мере, одна из самых толстых ветвей дерева) и есть математический анализ.

Основные объекты, рассматриваемые в математическом анализе в разных аспектах со всей тщательностью, – ОТОБРАЖЕНИЕ (ФУНКЦИЯ) И ПРЕДЕЛ. В одной популярной книге для школьников функцию называют спящей красавицей. Нам кажется, что правильнее было бы сравнить её с прекрасной принцессой, которой поклоняются интегралы, дифференциалы и многие другие математические объекты, и благодаря которым, она становится всё прекрасней и прекрасней. Как и остальные понятия математики, понятие отображения прошло долгий и сложный путь, складываясь постепенно, совершенствуясь вплоть до сегодняшнего дня одновременно с развитием математики.

Существует много направлений изучения отображения. Почти все они основаны на понятии предельного перехода. Большинство из них со временем выделилось из математического анализа в качестве самостоятельных дисциплин: теория обыкновенных дифференциальных уравнений, теория функций комплексного переменного, функциональный анализ, теория вероятностей, дифференциальная геометрия, вариационное исчисление и другие. Но все эти дисциплины предполагают основательное знание математического анализа, который вам предстоит изучать в течение четырех (!) семестров.

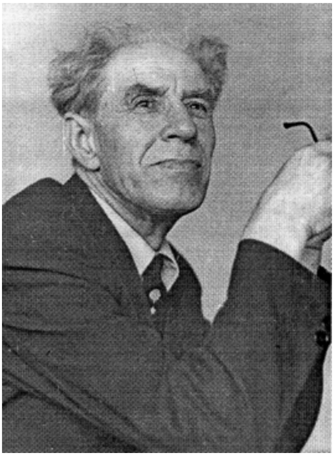
Надеемся, вам небезынтересно узнать, кем и как развивалось преподавание этого курса для студентов нашего факультета. В том или ином виде математический анализ читают в томских вузах более ста лет. Вначале этот курс слушали лишь студенты Технологического института (прародитель Политехнического университета), затем, после открытия в 1917 году в Университете физико-математического факультета, – студенты университета. Сегодня его слушают студенты всех вузов нашего города.

Первым профессором математики в Сибири был Фёдор Эдуардович Молин (1861–1941), чей портрет смотрит на вас, когда находитесь на кафедре математического анализа. Он не только разработал программы математической подготовки инженеров в открывшемся в 1900 году Технологическом институте, не только читал лекции, но и написал в течение нескольких лет 12 учебников по математическому анализу.

Отметим, что первым учебником по математическому анализу принято считать книгу “Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий”, написанную французским математиком Гийомом Франсуа Антуаном де Лопиталем (1661–1704), вышедшую в 1696 году (имеется русский перевод: Г.Ф. де Лопиталь. Анализ бесконечно малых. – Москва; Ленинград. Гостехиздат, 1935).

С первых шагов математического образования в Томске математический анализ преподавал и выпускник Казанского университета Владимир Леонидович Некрасов (1864–1922), также написавший несколько учебников по математическому анализу. В составе открывшегося в Университете физико-математического факультета были кафедра чистой математики, кафедра теоретической и практической механики, кафедра астрономии и геодезии, а также кафедры физики с физической географией и метеорологией, минералогии с геологией и палеонтологией, ботаники и зоологии со сравнительной анатомией, технологии и технической химии. Для работы на математических кафедрах в первую очередь были приглашены профессора Ф.Э. Молин и В.Л. Некрасов.

В 1921 году среди немногочисленных первых выпускников физико-математического факультета была Евстолия Николаевна Аравийская (1898–1993). Её оставили при университете для подготовки к преподавательской деятельности. Через два года она начала работать на нашем факультете и проработала пятьдесят пять лет. Е.Н. Аравийская долгие годы читала курс математического анализа, всегда стараясь внести в чтение современные идеи и методы.



В 1939 году работать в Томский государственный университет приехал по окончании аспирантуры выпускник Ленинградского университета Захар Иванович Клементьев (1903–1994). С этого времени его жизнь и деятельность была неразрывно связана с нашим факультетом. Более сорока лет он с непревзойденным мастерством читал лекции по математическому анализу и по другим основным математическим предметам. Одним из итогов его многогранной преподавательской и научной деятельности явилось создание учебных пособий по математическому анализу и теории функций действительного переменного. По инициативе благодарных учеников, бывших студентов З.И. Клементьева, в 1995 году Международный Астрономический Совет присвоил одной из новых открытых малых планет имя КЛЕМЕНТЬЕВ.

Но шло время, на факультете вырастали новые и новые поколения ученых, влюбленных в математику, отдающих свою энергию и знания подготовке молодых исследователей. С 1977/78 учебного года и до сегодняшнего дня чтение курса математического анализа осуществляют доценты Г.Г. Пестов, С.А. Копанев, Г.В. Сибиряков. Все они выпускники нашего факультета, изучавшие математический анализ у З.И. Клементьева и Е.Н. Аравийской. Лекторы работают в тесном контакте со своими помощниками Т.В. Емельяновой, Н.А. Исаевой, Т.В. Касаткиной, Л.С. Копаневой, Э.Н. Кривяковой, Ю.А. Мартыновым, Б.В. Соколовым, ведущими практические занятия, на которых студенты обсуждают определения и теоремы лекционного материала и упражняются в приобретении навыков их применения. Первым в России практические занятия по математическим дисциплинам ввел Ф.Э. Молин. Представители многих вузов России приезжали к томичам, чтобы перенять опыт проведения практических занятий.

В середине прошлого века физико-математический факультет разделился на несколько факультетов. Развивать математическую науку и готовить специалистов в области математики и механики было поручено вновь образованному механико-математическому факультету.

Сотрудники кафедры математического анализа, как и все сотрудники механико-математического факультета, гордятся тем, что работают в классическом университете, на факультете, славном своими традициями. На кафедре немало тех, кто помнит замечательные лекции Е.Н. Аравийской, артистичные лекции З.И. Клементьева и других, использует их опыт в своей работе. Но время неумолимо, а человеческая память несовершенна. Пытаясь передать дух прошлых поколений, их опыт новым поколениям, инициативная группа организовала написание серии брошюр (с биографиями, портретами, краткими характеристиками научных результатов и полными указателями научных трудов) об основоположниках математического образования в Томске. Ниже приведен полный список вышедших брошюр этой серии. При желании на факультете можно подробно познакомиться с содержанием каждой брошюры.

Евстолия Николаевна Аравийская (Биография, указатель трудов) (Томск, 1998).
Исаак Хаимович Беккер (Биография, указатель трудов) (Томск, 1998).
Лев Александрович Вишневский (Биография, указатель трудов) (Томск, 1999).
Захар Иванович Клементьев (Биография, указатель трудов) (Томск, 1997).
Борис Павлович Куфарев (Библиографический сборник) (Томск, 2005).
Павел Парфеньевич Куфарев (Биография, указатель трудов) (Томск, 1997).
Роза Михайловна Малаховская (Биография, указатель трудов) (Томск, 1999).
Федор Эдуардович Молин (Биография, указатель трудов) (Томск, 1998).
Вадим Васильевич Слухаев (Биография, указатель трудов) (Томск, 2001).
Георгий Дмитриевич Суворов (Биография, указатель трудов) (Томск, 1998).
Евгений Дмитриевич Томилов (Биография, указатель трудов) (Томск, 1997).
Василий Васильевич Черников (Биография, указатель трудов) (Томск, 1998).
Роман Николаевич Щербаков (Биография, указатель трудов) (Томск, 1997).

Портреты большинства из этих ученых вы можете увидеть на кафедрах факультета, а портреты Ф.Э. Молина и П.П. Куфарева украшают также портретную галерею профессоров в главном корпусе университета.

## О кафедре

Основной курс, который студенты механико-математического факультета изучают два полных учебных года, это курс математического анализа, осуществляемый сотрудниками нашей кафедры. Кафедра также является выпускающей кафедрой, её сотрудники руководят дипломными работами студентов. При кафедре имеется аспирантура, работает лаборатория математического анализа.

Кафедра математического анализа существует в университете с 1938 года. Первоначально кафедра была в составе физико-математического факультета, затем в 1948 году вошла в состав организованного тогда же механико-математического факультета. Как правило, сотрудниками кафедры становятся лучшие выпускники факультета. В частности, все заведующие кафедрой математического анализа являются питомцами университета.

За 70-лет существования кафедры ею заведовали:
с 08.08.1938 г. по 28.08.1940 г. – Евстолия Николаевна Аравийская (выпускница 1921 года),
с 28.08.1940 г. по 24.06.1964 г. – Павел Парфеньевич Куфарев (выпускник 1931 года),
с 24.06.1964 г. по 01.09.1969 г – Игорь Александрович Александров (выпускник 1954 года),
с 01.09.1969 г. по 15.02.1974 г. – Герман Гаврилович Пестов (выпускник 1955 года),
с 15.02.1974 г. по 01.05.1975 г. – Вильгельм Генрихович Фаст (выпускник 1959 года),
с 01.05.1975 г. по 30.06 1976 г. – Сергей Анатольевич Копанев (выпускник 1964 года),
с 30.06.1976 г. по 01.09.1981 г. – Г.Г. Пестов,
с 01.09.1981 г. по 31.05.1982 г. – С.А. Копанев,
с 01.06.1982 г. по настоящее время – И.А. Александров.

В настоящее время на кафедре математического анализа работают:

*заведующий кафедрой, доктор физико-математических наук, член-корреспондент Российской академии образования, профессор* Игорь Александрович **Александров**

*старший преподаватель* Татьяна Вениаминовна **Емельянова**

*старший преподаватель* Нина Алексеевна **Исаева**

*доцент, кандидат физико-математических наук*

Татьяна Васильевна **Касаткина**

*доцент, кандидат физико-математических наук*

Сергей Анатольевич **Копанев**

*доцент, кандидат физико-математических наук*

Лидия Сергеевна **Копанева**

*доцент, кандидат физико-математических наук*

Элеонора Ноновна **Кривякова**

*старший лаборант* Елена Петровна **Кузнецова**

*старший преподаватель* Юрий Алексеевич **Мартынов**

*профессор, доктор физико-математических наук*

Герман Гаврилович **Пестов**

*доцент, кандидат физико-математических наук*

Геннадий Васильевич **Сибиряков**

*доцент, кандидат физико-математических наук*

Борис Васильевич **Соколов**

Все сотрудники кафедры – высокообразованные специалисты с базовым университетским образованием.

Кроме курса математического анализа, давшего название кафедре, сотрудники кафедры осуществляют чтение лекций и проведение практических и семинарских занятий по другим курсам учебного плана специальностей 01.01.00 (математика) и 01.09.00 (механика). В ежегодные постоянные обязанности кафедры входит чтение лекций и ведение практических занятий, прием экзаменов по следующим **основным** курсам:

Математический анализ (01.01.00, 01.09.00), 1 – 4 семестры, (лекции – 280 часов, практические занятия – 280 часов, самостоятельная работа – 250 часов, общий объем – 810 часов).

Обыкновенные дифференциальные уравнения (01.01.00), 3 – 4 семестры, (лекции – 70 часов, практические занятия – 70 часов, самостоятельная работа – 80 часов, общий объем – 220 часов).

Обыкновенные дифференциальные уравнения (01.09.00), 3 – 4 семестры, (лекции – 70 часов, практические занятия – 70 часов, самостоятельная работа – 80 часов, общий объем – 220 часов).

Теория функций комплексного переменного (01.01.00), 4 – 5 семестры, (лекции – 52 часа, практические занятия – 70 часов, самостоятельная работа – 43 часа, общий объем – 165 часов).

Комплексный анализ (01.09.00), 5 семестр, (лекции – 54 часа, практические занятия – 36 часов, самостоятельная работа – 74 часа, общий объем – 164 часа).

Теория вероятностей (01.01.00), 5 семестр, (лекции – 36 часов, практические занятия – 36 часов, самостоятельная работа – 38 часов, общий объем – 110 часов).

Математическая статистика (01.01.00), 6 семестр, (лекции – 34 часа, практические занятия – 34 часа, самостоятельная работа – 42 часа, общий объем – 110 часов).

Случайные процессы (01.01.00), 8 семестр, (лекции – 34 часа, самостоятельная работа – 20 часов, общий объем – 54 часа).

Теория вероятностей и математическая статистика (01.09.00), 7 семестр, (лекции – 54 часа, практические занятия – 36 часов, самостоятельная работа – 74 часа, общий объем – 164 часа).

Теория случайных процессов (01.09.00), 8 семестр, (лекции – 18 часов, практические занятия – 16 часов, самостоятельная работа – 20 часов, общий объем – 54 часа).

Теория множеств (01.01.00), 2 семестр, (34 часа лекций).

Дополнительные главы современного естествознания (01.01.00), 3 семестр, (36 часов лекций).

Обзорные лекции для студентов пятого курса по программе государственного экзамена по специальностям 01.01.00 и 01.09.00.

Кафедра математического анализа обеспечивает математическую подготовку всех студентов механико-математического факультета, обучающихся по специальностям 01.01.00 (математика), 01.09.00 (механика), и осуществляет специализацию студентов по теории функций комплексного переменного и специализацию “Математика экономического профиля”. В настоящее время на факультете наряду с традиционной подготовкой специалистов ведется подготовка бакалавров в области математики и механики. Кафедра принимает в этом активное участие. В 2008 году по кафедре впервые защищены выпускные квалификационные работы по направлению “бакалавр математики”. Кафедра осуществляет также подготовку аспирантов.

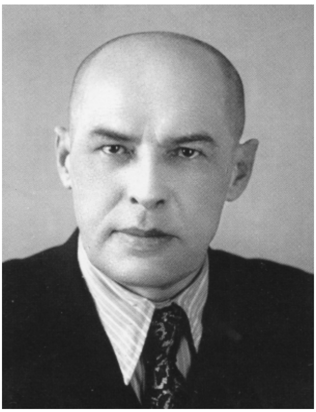
Кроме лекций и практических занятий кафедрой осуществляются другие обязательные формы обучения: УИРС, различные виды практики, курсовые работы, дипломная работа. И здесь многие из студентов вновь встречаются с сотрудниками кафедры математического анализа для совместной работы.

При желании студенты младших курсов могут под руководством сотрудников кафедры заниматься в **научных кружках** 1) по математическому анализу, 2) по теории вероятностей и математической статистике, 3) по теории функций комплексного переменного, 4) по теории дифференциальных уравнений. Хотя кружки и не являются обязательными, их роль в понимании математики трудно переоценить.

Начиная с шестого семестра, студенты механико-математического факультета наряду с общими курсами, должны слушать специальные курсы и заниматься исследовательской работой по выбранному научному направлению. Надеемся, что ознакомясь с краткой характеристикой научных школ кафедры математического анализа, вы сможете лучше сориентироваться в выборе направления для **специализации**.

## Теория функций комплексного переменного

Интерес к теории функций комплексного переменного зародился в Томске в среде участников научного семинара, организованного в тридцатых годах прошлого века при участии приехавшего в научно-исследовательский институт Прикладной математики и механики при ТГУ профессора С.Б. Бергмана, выпускников ТГУ Е.Н. Аравийской, П.П. Куфарева, а также Б.А. Фукса, А.А. Темлякова и других. Сформировались два направления: теория функций многих комплексных переменных, вариационные методы и экстремальные задачи геометрической теории функций. Первое из них развивалось в Томске Е.Н. Аравийской и ее учениками.



Основателем второго направления является Заслуженный деятель науки РСФСР профессор Павел Парфеньевич Куфарев (18.03.1909 – 17.07.1968). П.П. Куфарев, продолжая свои исследования плоских задач механики сплошной среды, осуществлял подготовку аспирантов по вариационным методам в теории однолистных функций. Кандидатские диссертации защитили: И.А. Александров, В.В. Черников, М.И. Редьков, М.И. Куваев, Ю.В. Чистяков, В.С. Федорова, Н.В. Попова, Н.В. Генина и другие.

Томская школа по геометрической теории функций расширялась и за счет получивших аспирантскую подготовку под руководством И.А. Александрова (защитившего докторскую диссертацию в 1963 г.) В.Я. Гутлянского, В.В. Барановой, С.А. Копанева, Р.С. Поломошновой, В.И. Попова (выпускников ММФ ТГУ), В.И. Кана, А.С. Сорокина, Б.Г. Цветкова (выпускников других вузов) и других молодых исследователей.

Исследовательская работа по геометрической теории функций, тесно связанной с вариационными задачами и оптимальным управлением, успешно ведется на кафедре без каких-либо перерывов на протяжении шестидесяти лет. Ее результаты отражены в монографиях, учебных пособиях, в многочисленных статьях в “Докладах Академии наук СССР (России)”, в “Сибирском математическом журнале”, в “Успехах математических наук”, в “Украинском математическом журнале”, в “Известиях вузов”, в “Математических заметках”, в Трудах ТГУ и “Вестнике ТГУ”, в других периодических журналах, а также в Материалах международных математических съездов, международных и региональных научных конференций.

Воспитанники школы по теории функций стали авторами докторских и кандидатских диссертаций, ведущими специалистами в коллективах по месту своей работы в вузах Томска, в университетах России, а также за рубежом. Все они поддерживают научные связи со своим томским базовым коллективом.

Многие результаты, полученные в Томской школе, были в свое время, а некоторые остаются и сейчас, наиболее сильными в соответствующем круге задач. Были решены конкретные экстремальные задачи с указанием экстремальных или граничных функций на различных классах однолистных функций. Дано объединение вариационного метода и метода площадей, приведшее к приближенному (численному) методу решения некоторых экстремальных задач. Развиты методы качественного исследования средствами аналитической теории дифференциальных уравнений и теории отображений экстремальных функций относительно широкого класса функционалов. Введены в рассмотрение и изучены новые классы однолистных отображений, например, отображения с симметрией переноса. На протяжении нескольких лет исследования проводились по гранту РФФИ “Ведущие научные школы России”, отмечались президентским грантом по подготовке молодых кандидатов наук.

Среди преподавателей кафедры математического анализа в настоящее время научную работу в области геометрической теории функций комплексного переменного ведут: профессор И.А. Александров, доценты Т.В. Касаткина, С.А. Копанев, Л.С. Копанева, аспиранты и дипломники.

Работает научный семинар (руководитель И.А. Александров).

Осуществляется специализация по теории функций комплексного переменного.

## Теория вероятностей, математическая статистика и математика экономического профиля

Явления, происходящие в природе и обществе , условно можно разделить на детерминированные и случайные. Случайные явления и математические модели эксперимента изучает теория вероятностей и основанные на ней многочисленные вероятностно-статистические дисциплины. Современная теория вероятностей представляет собой развитую математическую теорию. В теории вероятностей изучаются свойства событий, случайные величины и их свойства, теория пределов последовательностей случайных величин, элементы стохастического анализа. В математической статистике развитая теория применяется для исследования вероятностной природы случайных явлений по результатам их наблюдений. Знания по теории вероятностей и математической статистике необходимы при исследовании задач физики, химии, техники, экономики и других областей человеческого знания. Всякая статистическая обработка данных полностью основана на теории вероятностей и математической статистике. В настоящее время теория вероятностей широко применяется и в исследовании финансового рынка, например, при анализе экономических задач, построении оптимальной стратегии в рамках выбранной модели использования денежных средств, определении условий, обеспечивающих жизнеспособность выбранной модели. В этом направлении коллектив сотрудников кафедры работает в содружестве с Руанским университетом (Франция). Студенты имеют возможность слушать курсы лекций и участвовать в семинарах регулярно проводимых кафедрой при участии профессоров Руанского университета.

Сотрудниками кафедры получены некоторые результаты по теории случайных полей, теории марковских процессов и их обобщений. В математической статистике решены многие задачи учета дополнительной информации в статистических процедурах, решены некоторые прикладные задачи. Построена вероятностная модель образования запасов полезных ископаемых, которая используется в качестве основы теории и практики прогностических расчетов в геологии. Получили широкую известность исследования по статистической структуре поля вывала леса в районе падения Тунгусского метеорита, а также исследования статистической природы кратерообразования на Луне и строения лунного грунта. Выполнены исследования по теории оптимального резервирования. Получены результаты о свойствах оптимальных стратегий резервирования (в модели Райкова–Герцбаха), что позволило упростить алгоритм разыскания оптимальной стратегии.

Работает научный семинар.

По этому научному направлению осуществляется специализация. В осуществлении специализации участвуют Т.В. Емельянова, Н.А. Исаева, Э.Н. Кривякова, Г.Г. Пестов, И.Г. Устинова и другие сотрудники факультета.

## Теория упорядоченных полей

Успешно продолжаются исследования по теории упорядоченных полей и групп. Получены необходимые и достаточные условия циклической упорядочиваемости группы, построена теория упорядоченных множеств и 2-упорядоченных полей и тел. С построением теории сечений в упорядоченном поле стало возможным охарактеризовать вещественно замкнутые поля, поля Хана и некоторые другие в терминах сечений. В нестандартном анализе получено необходимое и достаточное условие справедливости теоремы направленности. Сформулировано понятие локально внутреннего множества и исследована продолжимость некоторых внешних функций до локально внутренних функций.

Работает научный семинар (руководитель Г.Г. Пестов).

По этому научному направлению осуществляется специализация под научным руководством Г.Г. Пестова, Н.Ю. Галановой и других сотрудников факультета.

Завершая рассказ о кафедре, приведем некоторые сведения о других аспектах работы кафедры.

Сотрудниками кафедры написаны монографии, учебники и учебные пособия:

1. И.А. Александров. “Конформные отображения односвязных и многосвязных областей”. – Томск: Изд-во ТГУ, 1976. – 156 с.
2. И.А. Александров. “Параметрические продолжения в теории однолистных функций”. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.
3. Г.В. Сибиряков. “Введение в теорию пространств Банаха”. – Томск: Изд-во ТГУ, 1982. – 81 с.

4. Г.Г. Пестов. “Дифференцируемые отображения в конечномерных пространствах”. – Томск: Изд-во ТГУ, 1983. 74 с.
5. И.А. Александров, В.В. Соболев. “Аналитические функции комплексного переменного”. – Москва: Высшая школа, 1984. – 192 с.
6. Ю.К. Устинов, Ю.Г. Дмитриев, “Статистическое оценивание распределений вероятностей с использованием дополнительной информации”, – Томск: Изд-во ТГУ,. 1988. – 195 с.
7. Ю.К. Устинов, “Математика для экономистов”. Ч.1. – Томск: Изд-во НТЛ, 1997. – 228 с.
8. И.А. Александров, С.Я. Александрова, Ф.Г. Унгер, А.В. Цыро. “Задачник и руководство к практическим работам по физической и коллоидной химии”. – Томск: Изд-во ТГУ, 2000. – 44 с.
9. С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков. “Математический анализ”. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. – 108 с.
10. И.А. Александров. “Методы геометрической теории аналитических функций”. – Томск: Изд-во ТГУ, 2001. – 220 с.
11. И.А. Александров. “Теория функций комплексного переменного”. – Томск: Изд-во ТГУ, 2002. – 510 с.
12. И.А. Александров, С.Я. Александрова, Л.Я. Цыро. “Учебные материалы по курсу физической и коллоидной химии”. – Томск: Изд-во ТГУ, –2003. – 104 с.
13. Г.Г. Пестов. “Двумерно упорядоченные поля”. – Томск: Изд-во ТГУ. –2003. – 128 с.
14. Б.В. Соколов. “Задачи с параметрами”. – Томск: Изд-во ТГУ, 2003. – 72 с.
15. И.А. Александров. “Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения”. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 94 с.
16. И.А. Александров, С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова. “Место математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ”. Томск: ТГУ. 2004. – 98 с.
17. И.А. Александров. “Комплексные числа и элементарные функции комплексного переменного”. – Томск. – 2005. – 116 с.
18. И.А. Александров, С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков. “Место математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ”. Томск. – 2005. – 152 с.
19. И.А. Александров, С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков. “Место математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ”. Томск. – 2007. – 147 с.
20. С.А. Копанев, Л.С. Копанева, Э.Н. Кривякова. “Язык математического анализа”. Томск. – 2008. – 76 с.

Наряду с преподавательской деятельностью, сотрудники кафедры ведут активную научную работу. За 2007-й календарный год опубликовано более 20 научных и научно-методических работ, сделано 12 докладов на научных конференциях разного уровня.

При кафедре работает **лаборатория математического анализа** (НИЧ ТГУ, зав. лабораторией – доцент Александра Николаевна Малютина, научный руководитель – И.А. Александров).

Все сотрудники кафедры прилагают большие усилия, направленные на развитие у студентов и школьников интереса к изучению математики, на воспитание у них вкуса к исследовательской работе. Кафедра организует работу секции математического анализа и секции теории вероятностей и математической статистики ежегодных научных студенческих конференций ММФ.

В прошедшем учебном году под председательством И.А. Александрова проведена X межрегиональная молодежная конференция студентов и школьников "Математика, её содержание, методы и значение" и X областная научная конференция школьников «Математическое и физическое моделирование задач естествознания, сопредседателем которой был И.А. Александров. Сотрудники кафедры ведут большую работу со школьниками и учителями математики города Томска, области и региона: ведут занятия в физико-математической школе (ФМШ) при ТГУ, участвуют в работе летних ФМШ, работают на подготовительных курсах, проводят занятия и консультации в центрах довузовской подготовки региона, участвуют в работе курсов и семинаров для учителей, проводимых Томским областным институтом повышения квалификации работников образования и Томским государственным педагогическим университетом, участвуют в создании учебно-методических пособий и учебников для школьников и учителей.

Дополнительные сведения о научно-педагогической работе кафедры и её сотрудниках можно получить по электронному адресу: http://www.math.tsu.ru.

В заключение заведующий кафедрой Игорь Александрович Александров делится с вами размышлениями о том, как с наибольшей пользой использовать время учебы на механико-математическом факультете.

## Приступающему к изучению математики на ММФ

В своё время все мы, преподаватели кафедры математического анализа, будучи в вашем возрасте, начали путь, который выбрали теперь и вы. У нас были, в основном, очень хорошие учителя, советами которых с некоторыми добавлениями, почерпнутыми из своего опыта профессиональной деятельности и постоянной продолжающейся всю жизнь учёбы, хотелось бы поделиться. Мы думаем, что в чужом опыте можно найти дополнительный источник сил, побуждающий к активной собственной деятельности.

Каждый поступающий в университет мотивирует своё намерение стать студентом желанием иметь высшее образование. Оно легко не даётся, особенно на факультетах, подобно механико-математическому, принадлежащих к весьма трудным. Вы уже прошли процедуру экзаменационного отбора и показали свой интерес к математике, склонность овладевать её содержанием и методами. Необходимые условия для успешной студенческой работы, таким образом, имеются. Но этого мало, очень мало для достижения поставленной цели, поскольку существует множество препятствий на пути к ней. Нет смысла все их пытаться здесь назвать. Некоторые заслуживают упоминания. Это, прежде всего, часто встречающаяся инертность ума, отвлечение от дел, которыми следует заниматься, слабость воли.

Есть злые вещи, отвлекающие человека от дела, которому он предназначен, сбивающие с выбранной дороги.

В поле бес нас водит, видно,
И кружит по сторонам.

Нередко для самоуспокоения ставится вопрос: “А зачем всё это мне надо?”, подразумевающий непременный ответ: “И так обойдётся, проскочим”. Если в каких-то житейских ситуациях такой подход к делу бывает оправданным и даже полезным, то при изучении математики он часто приводит к катастрофическим последствиям.

Школа, которую все вы успешно окончили, не даёт правильного представления о науках, изучаемых в университетах. Она и не обязана это делать. Совместная деятельность университетов и школ предоставляет возможность школьникам познакомиться с начальными идеями современной математики, с её простейшими алгоритмами и технологиями. Это помогает интересующимся понять свои склонности, увлечься математикой, найти себя в ней, пробудить желание заняться математическим творчеством.

Формы обучения студентов на механико-математическом факультете многообразнее школьных уроков по математике, само обучение значительно интереснее!

Центральное место в первых пяти семестрах обучения отводится лекциям по обязательным курсам. В них сообщается слушателям определённый объём научных знаний. Важнейшей задачей становится изучение языка науки. Для многих студентов, желающих быстрее иметь практические результаты обучения, эта часть работы кажется скучной и излишне трудоёмкой. Надо своевременно преодолевать возникающие препятствия, запоминать и буквально выучивать определения, формулировки теорем, запоминать формулы. Всё это сопровождается необходимостью разбираться в доказательствах трудных теорем, в выводах формул и т.д., добиваться понимания абстракций. Здесь необходимы собственные усилия, и надо просто верить в то, что это необходимый этап обучения.

Не нужно жалеть своего труда и усилий на усвоение математического языка, развитие математического мышления, поскольку они являются основным инструментом научного осмысливания явлений природы, что в свою очередь является целью любой теоретической науки. Подробный конспект лекций по обязательному курсу – основа для его изучения. Лектор тратит много часов квалифицированного и напряжённого труда, готовясь к каждой лекции. Пропуск вами лекции (даже если перепишете в свою тетрадь конспект, составленный вашим сокурсником, слушавшим лекцию), создаст вам дополнительные трудности. Иногда пропуск одной лекции приводит к полному непониманию излагаемого на следующих лекциях.

Практические занятия по математическим курсам очень важны. На них отрабатывается техника решения стандартных упражнений и приобретаются соответствующие навыки. Особую ценность имеют задачи, требующие самостоятельного, иногда длительного, домашнего размышления. Именно они позволяют глубже раскрыть для себя содержание понятий, их связи, выражаемые соответствующими теоремами, побуждают познакомиться с изложением одного и того же материала в разных учебниках и руководствах.

Не упускайте случая познакомиться с историей математики. Имена её творцов должны стать чем-то большим, чем составная часть названий важнейших теорем и формул. Можно ли освоить предмет, оставаясь равнодушным к нему, ограничившись только заучиванием? Узнавая, кем, при каких обстоятельствах он создавался, понимая его итог как итог усилий многих человеческих жизней, каждый студент обретает восприятие математических результатов как часть общечеловеческих культурных ценностей, лучше понимая их.

Математику изучают студенты многих факультетов университетов. В некоторых технических университетах перечень математических дисциплин бывает большим, чем на механико-математическом факультете. В педагогических вузах он почти равен университетскому. Чем же отличаются выпускники-математики от выпускников других вузов? Как те, так и другие должны многое знать. Одни должны уметь применять знания к решению интересных задач, другие должны квалифицированно преподавать математику в средней школе. Выпускники-математики не только должны знать, но и многое уметь. Они должны уметь разрабатывать новые математические средства, создавать новые алгоритмы, которые будут использовать все, нуждающиеся в математических методах исследователи. Иными словами, для выпускников-математиков знания должны стать основой и средством для исследовательской работы, а не самоцелью.

Обратим внимание ещё на одно обстоятельство: необходимость вдумчивого самоконтроля. Единообразная и детальная регламентация времени для всех студентов-математиков совершенно нецелесообразна, ибо успех в математике всегда связывается с большим трудом и глубокими индивидуальными качествами молодых людей, которые в некоторых смыслах различны. Но всех должно объединять умение трудиться и ценить время. Если цели стали казаться недостижимыми, то следует посмотреть на тех, у кого главное получается лучше, и спросить себя, что же не сделал вовремя, что надо сделать, чтобы стать не слабее других?

Вы – студенты механико-математического факультета. Начинается реализация вашего желания стать математиками. Впереди много сложной работы, которая станет тем радостней, чем больших успехов сумеете достичь. Математик не может родиться как математик вне математического коллектива, вне математической школы, без умного руководителя. Нам пока не известны примеры, когда талантливый математик родился бы сам по себе. Постарайтесь найти себе научный коллектив по своим склонностям и доказать право на работу в нём своими успехами. Научитесь пользоваться своими умственными способностями, развивайте интерес к делу, укрепляйте свою волю и трудитесь. Только так можно достигнуть многого.

# О курсе “Математический анализ”

Курс математического анализа является одним из основных в программе обучения студентов ММФ и изучается, начиная с первого семестра, в течение двух лет. Предлагаемый далее материал об этом курсе, по нашему мнению, поможет вам в его освоении.

Рабочий план знакомит вас с распределением материала по семестрам. Программа достаточно подробно описывает содержание курса математического анализа. Программа курса и рабочий план составлены на основе государственного стандарта (см. Приложение № 1) лектором вашего потока кандидатом физико-математических наук доцентом кафедры Геннадием Васильевичем Сибиряковым. Вы можете сравнить эту программу с программами, предлагаемыми другим потокам (см. Приложения № 2 и № 3).

Приведенный список литературы, не претендуя на полноту, познакомит вас с обширной литературой по математическому анализу, изданной на русском языке. Список и путеводитель к нему помогут сориентироваться в выборе книг для изучения интересующих вас вопросов и будут полезны как при освоении курса математического анализа, так и на протяжении всего периода обучения в университете, включая время подготовки к государственному экзамену по математике.

Список тем учебной курсовой работы, дополненный выдержками из “Положения об учебной курсовой работе”, ознакомит вас с характером и порядком выполнения обязательной составляющей учебного плана четвертого семестра – написанием и защитой учебной курсовой работы, и даст возможность совместить свой интерес к более глубокому изучению отдельных вопросов математического анализа с её выполнением.

Вещественное число относится к основным объектам математического анализа. В школьной математике уделяется большое внимание работе с рациональными числами, хотя само понятие множества вещественных чисел в школьной программе отсутствует. В учебниках по математическому анализу излагаются разные версии теории множества вещественных чисел, но, как правило, сжато и с отсутствием полных доказательств. Один из способов введения действительных чисел с подробными доказательствами изложен в книге [257].

С аксиоматическим подходом к определению понятия числа вы также можете познакомиться, прочитав помещенную в этой книге статью Г.В. Сибирякова «Аксиоматическая теория вещественного числа».

Интересные идеи, относящиеся к понятию вещественного числа, вы найдете в статье П.К. Рашевского «О догмате натурального ряда» (журнал “Успехи математических наук”. 1973. Т. 28, вып. 4(172)), имеющейся также и в этой книге. Петр Константинович Рашевский (1907 – 1985) с 1938 г. работал в Московском университете в должности профессора, его научная деятельность была посвящена развитию различных направлений в геометрии: римановой, аффинной, созданной им полиметрической геометрии, аксиоматике проективной геометрии и других.

Все приведенные материалы также могут помочь вам уже на первом курсе сделать первые шаги на пути к самостоятельным исследованиям.

# Программа по математическому анализу

## 1. Введение в анализ

1.1. Множества. Способы задания. Объединение, пересечение, разность, произведение двух множеств. Семейство множеств. Объединение и пересечение семейства множеств. Формулы двойственности и другие свойства операций. Логическая символика. Кванторы.

1.2. Вещественные числа. Аксиомы упорядоченного поля. Аксиома непрерывности. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Его единственность. Обзор других способов введения вещественных чисел (сечения Дедекинда, 10-е дроби). Ограниченные множества $A \subset \mathbb{R}$. Верхние и нижние грани множества. Максимум и минимум множества. Принцип Архимеда. Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Математическая индукция. Бином Ньютона. Супремум и инфимум ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$. Супремум и инфимум неограниченного множества.

1.3. Отображения или функции. Определение отображения (функции) по Лобачевскому–Дирихле. Определение отображения, опирающееся на понятие графика. Область задания и область значений. Способы задания функции. Сужение и продолжение. Образы и прообразы точек и множеств. Композиция. Инъекция, сюръекция, биекция. Обратное отображение. Ограниченные вещественные функции. Супремум и инфимум вещественной функции.

1.4. Числовые последовательности. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Арифметические и порядковые свойства. Важные примеры: пределы последовательностей $(q^n)$ и $(nq^n)$, где $|q|<1$, $(\sqrt[n]{n})$ и $(\sqrt[n]{a})$. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Их сравнение. Неопределенности. Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности. Число $e$. Теорема Кантора о вложенных сегментах. Принцип Больцано–Вейерштрасса. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

1.5. Числовые ряды. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимое условие сходимости. Геометрический и гармонический ряды. Простейшие свойства сходящихся рядов. Критерий Коши. Признаки сравнения. Обобщенный гармонически ряд. Ряд $\Sigma\frac{1}{n}\log_2^\alpha n$. Признаки Даламбера, Коши и Раабе.

Абсолютно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке. Теорема о произведении. Повторные и двойные ряды. Условно сходящиеся ряды. Теорема Римана. Признаки Дирихле, Абеля и Лейбница.

1.6. Предел функции. Наводящие примеры. Определение предела вещественной функции вещественного переменного при $x \to x_0$ по Коши. Первый замечательный предел. Другие примеры. Единственность предела. Критерий Гейне. Критерий Коши. Арифметические и порядковые свойства. Односторонние пределы. Предел при $x \to \pm\infty$. Бесконечные пределы. Предел монотонной функции. Замена переменного под знаком предела (предел композиции).

1.7. Непрерывные функции. Функция, непрерывная в точке. Связь с понятием предела. Критерий Гейне. Арифметические свойства. Непрерывность сужения и композиции. Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность рациональных и тригонометрических функций. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Теоремы Вейерштрасса о непрерывной функции на сегменте. Теорема Коши о промежуточных значениях. Непрерывный образ промежутка. Непрерывность монотонной биекции промежутка на промежуток. Равномерно непрерывные функции. Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на сегменте. Теорема о непрерывности обратной функции.

1.8. Элементарные функции. Корни четной и нечетной степени. Степень с рациональным показателем. Экспонента и натуральный логарифм. Показательная, логарифмическая и степенная функции. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Гиперболические и обратные гиперболические функции. Элементарные функции. Непрерывность элементарных функций. Второй замечательный предел. Пределы функций $x^\alpha, a^x$ при $x \to \pm\infty$ и $\frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$, $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$, $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ при $x \to 0$.

1.9. Асимптотика. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Неопределенности. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Шкала бесконечно малых и бесконечно больших функций. Асимптотически эквивалентные функции.

## 2. Дифференциальное исчисление функций на $\mathbb{R}$

2.1. Дифференцируемые функции. Линейное приближение приращения функции в окрестности точки. Дифференциал функции в точке. Производная функции в точке. Связь производной с дифференциалом. Единственность дифференциала. Непрерывность дифференцируемой функции. Геометрический и физический смысл производной и дифференциала. Дифференцирование суммы, произведения, дроби и композиции. Инвариантность1-го дифференциала. Дифференцирование обратной функции. Таблица дифференциалов и производных. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

2.2. Основные теоремы. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Теорема Дарбу. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Другие типы неопределенностей. Производные высших порядков. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора. Форма Пеано. Формула Тейлора–Маклорена для функций $\mathrm{e}^x$, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ и $\operatorname{arctg} x$.

2.3. Исследование функций. Условия монотонности. Точки локального экстремума. Условия выпуклости. Точки перегиба. Асимптоты. Построение эскиза графика.

2.4. Первообразные. Задача восстановления пути по скорости и ускорению. Первообразная на промежутке. Неопределенный интеграл. Его линейность. Табличные интегралы. Два варианта замены переменного под знаком интеграла. Интегрирование по частям. Неэлементарные интегралы. Интегрирование рациональных функций. Метод Остроградского. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций.

## 3. Метрические пространства

3.1. Метрические пространства. Пространства $\mathbb{R}^2,\ldots,\mathbb{R}^n$. Свойства евклидовой метрики. Неравенство Коши. Аксиомы метрики. Метрическое пространство. Его подпространства. Изометрия. Примеры метрических пространств: прямая $\mathbb{R}$, плоскость $\mathbb{R}^2$, пространство $\mathbb{R}^n$, расширенная прямая $\tilde{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ с $\operatorname{arctg}$- метрикой, пространства $C[a,b]$, $m(S)$, $c$, $c_0$, $l_1$, $l_2$ и $s$, пространство Бэра. Шары. Открытые и замкнутые множества. Предельные точки.. Замыкание, внутренность и граница множества. Сходящиеся последовательности. Критерии сходимости в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\tilde{\mathbb{R}}$.

3.2. Предел и непрерывность. Предел отображения при $x \to x_0$. Критерий Гейне. Предел по множеству. Предел по базе множеств. Свойства предела отображения. Предел композиции. Непрерывные отображения. Критерий Гейне. Непрерывность сужения и композиции. Переход к пределу под знаком непрерывного отображения. Критерий непрерывности через прообразы открытых и замкнутых множеств. Гомеоморфизм.

3.3. Полнота и компактность. Фундаментальные последовательности. Полные пространства. Замкнутость полного подпространства. Полнота замкнутого подпространства полного пространства. Полнота $\mathbb{R}$, $\tilde{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^n$, $C[a,b]$ и $m(S)$. Примеры неполных пространств. Критерий Коши для существования предела отображения. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категориях. Принцип неподвижной точки. Принцип продолжения по непрерывности. Определение компактности множества на языке последовательностей. Замкнутость, ограниченность и полнота компакта. Компактность замкнутого подмножества компакта. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. Компактность пространства $\tilde{\mathbb{R}}$. Компактность непрерывного образа компакта. Непрерывные вещественные функции на компакте. Теоремы Вейерштрасса и Дини. Теорема о непрерывности обратного отображения. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Теорема Хаусдорфа об $\varepsilon$-сетях. Критерий компактности на языке открытых покрытий. Пространство $C(K)$ непрерывных функций на компакте. Его полнота.

3.4. Связность. Связные множества и пространства. Открыто-замкнутые множества. Непрерывный образ связного множества. Непрерывные кривые. Спрямляемые кривые. Линейная связность.

## 4. Мера и интеграл

4.1. Введение. Интуитивное содержание понятия интеграла (геометрия: площадь, физика: длина пути). Определение интеграла по Лейбницу, Коши и Риману. Интеграл Римана на сегменте. Суммы Дарбу. Существование интеграла Римана от непрерывной функции. Основные недостатки интеграла Римана. Идея определения интеграла по Лебегу. Необходимость теории меры.

4.2. Мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n$. Брусы. Мера открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$. Внешняя мера. Измеримые множества. Измеримость открытого множества. Объединение последовательности измеримых множеств. Компакты. Замкнутые множества. Дополнение измеримого множества. Пересечение последовательности измеримых множеств. Разность измеримых множеств. Критерий измеримости множества на языке замкнутых множеств. Мера измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Аддитивность, счетная аддитивность, полнота и регулярность меры Лебега. Инвариантность относительно изометрии. Структура измеримого множества. Мера некоторых конкретных множеств. Совершенное множество Кантора. Существование множеств, неизмеримых в смысле Лебега.

4.3. Введение в общую теорию меры. Алгебры и $\sigma$-алгебры подмножеств произвольного множества $S$. Примеры: $\sigma$-алгебра $2^S$ всех подмножеств $A \subset S$; $\sigma$-алгебра $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ всех множеств $A \subset \mathbb{R}^n$, измеримых в смысле Лебега; $\sigma$-алгебра $\mathfrak{L}(\Gamma)$ всех множеств окружности $\Gamma$, измеримых в смысле Лебега; $\sigma$-алгебра $\mathfrak{B}(M)$ борелевских подмножеств метрического пространства $M$, $\sigma$-алгебра $\mathfrak{K}(M)$ подмножеств пространства $M$, порожденная компактами. Общее понятие меры на $\sigma$-алгебре $\Sigma \subset 2^S$. Неотрицательные меры. Пространство с мерой. Примеры пространств с мерой. Простейшие свойства мер. Теорема о непрерывности меры. Разложение в смысле Жордана. Разложение в смысле Хана. Теорема Каратеодори о продолжении меры.

4.4. Измеримые функции. Эквивалентные определения. Измеримость супремума и инфимума последовательности измеримых функций. Измеримость поточечного предела последовательности измеримых функций. Измеримость композиции непрерывной функции с измеримым отображением. Арифметические свойства измеримых функций.

4.5. Интегрирование по неотрицательной мере. Интегрирование простых функций. Интегрирование неотрицательных измеримых функций. Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Суммируемые функции. Монотонность интеграла. Измеримая функция суммируема тогда и только тогда, когда суммируем ее модуль. Линейность, счетная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Понятие “почти всюду”. Уточнение основных свойств интеграла. Пространства $L_1(\mu)$ и $L_2(\mu)$. В частности, пространства $L_1(a,b)$ и $L_2(a,b)$. Теорема Радона–Никодима.

4.6. Интеграл Лебега на $\mathbb{R}$. Эквивалентность различных определений интеграла Лебега. Суммируемость непрерывной функции на сегменте. Суммируемость функции, интегрируемой по Риману. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. Интеграл по ориентированному промежутку. Его аддитивность и линейность. Непрерывность и дифференцируемость интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменного в интеграле по сегменту (для непрерывной функции; для суммируемой функции). Интегрирование по частям. 1-я и 2-я теоремы о среднем.

4.7. Приложения интеграла в анализе. Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора для функции на интервале. Формы Лагранжа, Коши, Шлемильха–Роша, Зорича. Интегральный признак сходимости числового ряда.

4.8. Приложения интеграла в геометрии и физике. Непрерывная кривая. Спрямляемая кривая. Вычисление длины кусочно-гладкой кривой. Площади плоских множеств. Площадь поверхности вращения. Приложения интеграла в механике и физике.

4.9. Квадратурные формулы. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса. Метод Монте-Карло.

4.10. Теорема Фубини в $\mathbb{R}^n$. Двойные, тройные, кратные и повторные интегралы. Теорема о сечениях измеримого множества. Мера произведения измеримого множества на полуинтервал. Теорема о подграфике. Измеримость по параметру интеграла, зависящего о параметра. Теорема Фубини для функции $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ и для функции $f:A\to\mathbb{R}$, где $A\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$. Раздельная измеримость измеримой функции нескольких переменных. Мера произведения двух измеримых множеств. Произведение $\sigma$-алгебр и неотрицательных мер. Теорема Фубини для произведения двух пространств с мерой.

## 5. Функциональные последовательности и ряды

5.1. Функциональные последовательности и ряды. Простая (поточечная) сходимость не сохраняет непрерывность. Понятие равномерной сходимости. Она сохраняет непрерывность. Критерий Коши для равномерной сходимости. Мажорантный признак Вейерштрасса для равномерной сходимости. Признаки Дирихле и Абеля. Примеры Вейерштрасса и ван дер Вардена. Сходимость в пространствах $C[a,b]$ и $m(S)$. Почленное интегрирование и дифференцирование функционального ряда.

5.2. Степенные ряды. Комплексные числа. 1-я теорема Абеля о степенных рядах. Круг и радиус сходимости. Теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда. Теорема Коши–Адамара. 2-я теорема Абеля. Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Ряд Тейлора. Аналитические функции. Важнейшие примеры разложений в ряд Тейлора–Маклорена.

## 6. Дифференциальное исчисление на $\mathbb{R}^n$

6.1. Пространство $\mathbb{R}^n$. Векторная структура, метрика, норма и скалярное произведение. Функции нескольких переменных. Координатные функции отображения из $M$ в $\mathbb{R}^p$. Покоординатность предела и непрерывности отображения в $\mathbb{R}^p$. Арифметические свойства предела и непрерывности отображений в $\mathbb{R}^p$. Линейные операторы $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Геометрический смысл линейности оператора $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Пространство $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$. Ограниченность, непрерывность, норма и матричное представление оператора $A \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$.

6.2. Дифференцируемые отображения. Локальное приближение линейными операторами приращения отображения $f$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$. Дифференциал Фреше $df(x_0):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ отображения $f$ в точке $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Единственность дифференциала. Непрерывность дифференцируемого отображения. Простейшие примеры дифференциалов. Геометрический смысл дифференциала. Дифференцирование композиции. Инвариантность формы 1-го дифференциала. Покоординатность операции дифференцирования. Основные средства дифференцирования. Дифференциалы линейных и билинейных операторов.

6.3. Частные производные 1-го порядка. Выражение дифференциала через частные производные. Производная вдоль вектора (дифференциал Гато). Достаточное условие дифференцируемости отображения. Цепное правило. Понятие о полной производной. Матрица Якоби. Ее связь дифференциалом Фреше. Якобиан отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Градиент вещественной функции. Его геометрический смысл.

6.4. Теоремы о конечных приращениях.

6.5. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных. Классы непрерывно дифференцируемых функций. Дифференциал 2-го порядка. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для вещественных и векторных функций нескольких переменных. Форма Пеано, интегральная форма и форма Лагранжа для ее остаточного члена. Ряд Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции нескольких переменных. Примеры.

6.6. Локальные экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия. Стационарные точки. Достаточные условия: Квадратичная форма $d^2 f(x_0, h)$. Критерий Сильвестра. Примеры.

6.7. Неявные функции. Неявная функция, определяемая одним уравнением. Геометрический смысл неявной функции. Существование и непрерывности неявной функции. Дифференцирование неявной функции. Примеры.. Теорема о локальной обратимости. Диффеоморфизмы. Примеры. Открытость регулярного отображения. Неявное отображение, определяемое системой уравнений. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости неявного отображения. Теорема о ранге. Понятие зависимости функций. Необходимое условие зависимости. Достаточное условие зависимости. Примеры.

6.8. Теория условного экстремума. Понятие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа. Геометрический смысл метода Лагранжа. Достаточные условия для точек условного экстремума. Примеры.

6.9. Замена переменного в кратном интеграле. Разложение диффеоморфизма. Допустимые диффеоморфизмы. Разложение единицы. Образ множества меры 0 относительно диффеоморфизма. Теорема о замене переменного для функций с компактным носителем. Общая теорема о замене переменного в интеграле Лебега по мере Лебега. Мера образа измеримого множества относительно диффеоморфизма. Геометрический смысл якобиана. Мера параллелепипеда размерности $n$. Мера параллелепипеда размерности меньше $n$.

### 7. Интегралы, зависящие от параметра

7.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Условия непрерывности. Дифференцирование интеграла по параметру (правило Лейбница). Обобщенное правило Лейбница. Интегрирование по параметру. Примеры. Кратные интегралы, зависящие от параметра.

7.2. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы Римана и Лебега. Суммируемость функции с абсолютно сходящимся несобственным интегралом. Линейность и аддитивность несобственного интеграла. Замена переменного. Интегрирование по частям. Формула Ньютона – Лейбница. Критерий Коши и другие признаки сходимости. Аналогия с теорией числовых рядов. Кратные несобственные интегралы.

7.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Понятие о равномерной сходимости. Условие непрерывности. Интегрирование по параметру. Дифференцирование по параметру. Критерий Коши и другие признаки равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интеграл Дирихле, интеграл Эйлера – Пуассона и другие примеры. Кратные несобственные интегралы, зависящие от параметра.

7.4. Эйлеровы интегралы. Бета-функция (область определения, симметрия, формула понижения). Гамма-функция (область определения, производные, формула понижения, продолжение на отрицательную полуось, формула Эйлера–Гаусса, формула дополнения). Выражение бета-функции через гамма-функцию. Приложения эйлеровых интегралов.

7.5. Свертка. Свертка функций на $\mathbb{R}$. Условия существования свертки. Ее коммутативность и ассоциативность. Свертка и преобразование сдвига. Дифференцирование свертки. Приложения свертки. Свертка функций на $\mathbb{R}^n$.

## 8. Анализ на многообразиях в $\mathbb{R}^n$

8.1. Многообразия в $\mathbb{R}^n$. Многообразие без края. Многообразие с краем. Примеры. Локальные карты и атласы. Локальные координаты. Полярные координаты на плоскости. Сферические координаты на сфере. Сферические и цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Естественные координаты на торе.

8.2. Гладкие многообразия в $\mathbb{R}^n$. Гладкие карты и атласы. Гладкие многообразия $S \subset \mathbb{R}^n$. Теорема о гладкой деформации. Функция перехода. Примеры. Теорема о функции перехода. Касательное пространство. Первая теорема о крае.

8.3. Общие методы введения гладких многообразий. График непрерывно дифференцируемого отображения. График его сужения на многообразие. Поверхность уровня непрерывно дифференцируемого отображения. Описание касательных пространств.

8.4. Мера Лебега на гладком многообразии. Длина спрямляемой кривой. Проблема определения понятия площади двумерной поверхности. Сапог Шварца. Определение меры открытого множества $G$ на многообразии $S$ через приближение касательными брусами. Общее определение меры на многообразии. Длина гладкой кривой. Площадь графика функции двух переменных. Площадь гладкого двумерного многообразия в $\mathbb{R}^n$. Площадь поверхности вращения. Площадь множества $A \subset \mathbb{R}^2$ в полярных координатах. Площадь множества на сфере в сферических координатах. Объем множества $A \subset \mathbb{R}^3$ в сферических и цилиндрических координатах. Интеграл 1-го рода по многообразию. Вычисление интеграла 1-го рода. Криволинейный и поверхностный интегралы 1-го рода. Геометрические и физические приложения интеграла 1-го рода.

8.5. Ориентируемые многообразия. Задание ориентации прямой $\mathbb{R}$, плоскости $\mathbb{R}^2$ и пространства $\mathbb{R}^3$. Базисы разной ориентации. Ориентированное пространство $\mathbb{R}^n$. Ориентация одномерного многообразия. Внешняя и внутренняя стороны сферы. Перевод на язык ориентации касательных пространств. Согласованные карты. Ориентирующий атлас. Примеры. Согласованность полярных и декартовых координат на плоскости. Согласованность сферических, цилиндрических и декартовых координат в $\mathbb{R}^3$. Ориентируемое многообразие. Введение ориентации ориентируемого линейно связного многообразия. Нормали к $(n-1)$-мерному многообразию в $\mathbb{R}^n$. Задание ориентации многообразия непрерывным полем нормалей. Примеры. Задание ориентации графика и поверхности уровня непрерывно дифференцируемой функции. Неориентируемые многообразия (лист Мебиуса, бутылка Клейна). Вторая теорема о крае. Ориентация края, согласованная с ориентацией многообразия. Примеры.

8.6. Дифференциальные формы. Внешнее произведение линейных функционалов. Геометрический смысл внешнего произведения функционалов $dx_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функционалы $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$ и $dz \wedge dx$ на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Кососимметрические формы $\Phi : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Пространство $Л^p(\mathbb{R}^n)$. Общий вид формы $\Phi \in Л^p(\mathbb{R}^n)$. Частные случаи. Дифференциальная форма $\omega : G \to Л^p(\mathbb{R}^n)$ степени $p$, $1 \leqslant p \leqslant n$, на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Дифференциальная форма степени $p = 0$. Канонический вид дифференциальной формы степени $p$. Частные случаи. Дифференциал вещественной функции как дифференциальная форма степени $1$. Скалярные и векторные поля. Дифференциальные формы работы и потока векторного поля. Их физический смысл. Потенциал векторного поля. Дифференциальные формы, соответствующие скалярному полю.

8.7. Операции над дифференциальными формами. Сложение дифференциальных форм. Умножение на функцию. Внешнее дифференцирование. Свойства внешнего дифференциала. Дифференциальные операции $\operatorname{grad}$, $\operatorname{rot}$ и $\operatorname{div}$ над скалярными и векторными полями. Их физический смысл и связь с операцией внешнего дифференцирования дифференциальных форм. Дифференциальные операции 2-го порядка. Внешнее умножение дифференциальных форм. Связь между внешним произведением дифференциальных форм и операциями над векторными полями. Замена переменных в дифференциальной форме. Свойства операции замены переменных.

8.8. Интегрирование дифференциальных форм. Поток векторного поля через ориентированную поверхность. Сведение к интегралу Лебега. Определение интеграла от дифференциальной формы потока по ориентированной поверхности. Общее определение интеграла 2-го рода от дифференциальной формы степени $k$ по ориентированному многообразию размерности $k$. Кусочно гладкие кривые и поверхности. Введение ориентации на кусочно гладкой поверхности. Интеграл 2-го рода по ориентированной $k$-мерной кусочно гладкой поверхности от дифференциальной формы степени $k$.

8.9. Основные интегральные формулы анализа. Формула Ньютона–Лейбница как свойство интеграла 2-го рода. Криволинейный интеграл 2-го рода. Его физический смысл. Формула Ньютона–Лейбница для криволинейного интеграла 2-го рода. Свойства работы потенциального поля. Условия потенциальности поля. Формула Грина. Геометрический смысл интегралов 2-го рода от дифференциальных форм $xdy$ и $ydx$. Формула Гаусса–Остроградского. Геометрический смысл интегралов 2-го рода от дифференциальных форм $x\,dy\wedge dz$, $y\,dz\wedge dx$ и $z\,dx\wedge dy$. Соленоидальные векторные поля. Классическая и общая формулы Стокса.

8.10. Приложения в физике. Гравитационное, электростатическое, магнитное и электромагнитное поля. Уравнения Максвелла и другие приложения.

## 9. Введение в гармонический анализ

9.1. Тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрическая система. Ее ортогональность. Коэффициенты Фурье. Основные проблемы рядов Фурье. Комплексная форма ряда Фурье. Теорема Римана–Лебега. Ядра Дирихле. Условие сходимости ряда Фурье в данной точке. Принцип локализации. Признак Дини. Признак Липшица. Признак равномерной сходимости ряда Фурье. Метод средних арифметических и другие методы суммирования числовых рядов. Суммы и ядра Фейера. Теоремы Фейера. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами.

9.2. Преобразование Фурье. Преобразование Фурье для функции $f\in L_1(\mathbb{R})$. Его важнейшие свойства. Суммирование расходящихся интегралов. Преобразование Фурье функций $f\in L_2(\mathbb{R})$. Теория Планшереля. Преобразование Лапласа. Основы операционного исчисления.

## Рабочий план курса
## “Математический анализ”

| Тема | Лекции | | Практика | |
|---|---|---|---|---|
| СЕМЕСТР 1 | | | | |
| 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ | | | | |
| 1.1. Множества | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 1.2. Вещественные числа | 3 | 5 | 3 | 6 |
| 1.3. Отображения или функции | 2 | 7 | 2 | 8 |
| 1.4. Числовые последовательности | 5 | 12 | 6 | 14 |
| 1.5. Числовые ряды | 5 | 17 | 6 | 20 |
| 1.6. Предел функции | 4 | 21 | 4 | 24 |
| 1.7. Непрерывные функции | 3 | 24 | 2 | 26 |
| 1.8. Элементарные функции | 2 | 26 | 2 | 28 |
| 1.9. Асимптотика | 1 | 27 | 1 | 29 |
| 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА $\mathbb{R}$ | | | | |
| 2.1. Дифференцируемые функции | 3 | 30 | 3 | 32 |
| 2.2. Основные теоремы | 2 | 32 | 2 | 34 |
| 2.3. Исследование функций | 2 | 34 | 2 | сем |
| Резерв | 2 | 36 | 2 | 36 |
| СЕМЕСТР 2 | | | | |
| 2.3. Исследование функций | 1 | сем | 2 | 2 |
| 2.4. Первообразные | 2 | 2 | 6 | 8 |
| 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА | | | | |
| 3.1. Метрические пространства | 4 | 6 | 3 | 11 |
| 3.2. Предел и непрерывность | 2 | 8 | 3 | 14 |
| 3.3. Полнота и компактность | 4 | 12 | 4 | 18 |
| 3.4. Связность | 1 | 13 | нет | |
| 4. МЕРА И ИНТЕГРАЛ | | | | |
| 4.1. Введение | 1 | 14 | нет | |
| 4.2. Мера Лебега | 3 | 17 | 2 | 20 |
| 4.3. Общая теория меры | 2 | 19 | 2 | 22 |
| 4.4. Измеримые функции | 1 | 20 | 1 | 23 |
| 4.5. Интеграл по неотрицательной мере | 5 | 25 | 3 | 26 |
| 4.6. Интеграл Лебега на $\mathbb{R}$ | 4 | 29 | 4 | 30 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4.7. Приложения в анализе | 1 | 30 | 2 | 32 |
| 4.8. Приложения в геометрии и физике | 1 | 31 | 3 сем | |
| 4.9. Квадратурные формулы | 1 | 32 | нет | |
| Резерв | 2 | 34 | 2 | 34 |
| СЕМЕСТР 3 | | | | |
| 4.8. Приложения в геометрии и физике | 2 сем | | 2 | 2 |
| 4.10. Теорема Фубини | 2 | 2 | 2 | 4 |
| 5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ | | | | |
| 5.1. Функциональные посл-ти и ряды | 2 | 4 | 3 | 7 |
| 5.2. Степенные ряды | 2 | 6 | 2 | 9 |
| 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ | | | | |
| 6.1. Пространство $\mathbb{R}^n$ | 2 | 8 | 2 | 11 |
| 6.2. Дифференцируемые отображения | 3 | 11 | 4 | 15 |
| 6.3. Частные производные 1-го пор. | 1 | 12 | 2 | 17 |
| 6.4. Теоремы о конечных приращениях | 1 | 13 | нет | |
| 6.5. Частные производные в. п. | 3 | 16 | 2 | 19 |
| 6.6. Локальные экстремумы | 1 | 17 | 1 | 20 |
| 6.7. Неявные функции | 5 | 22 | 6 | 26 |
| 6.8. Условный экстремум | 1 | 23 | 1 | 27 |
| 6.9. Замена переменного в кратном интеграле 4 | | 27 | 4 | 31 |
| 7. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА | | | | |
| 7.1. Собственные интегралы | 1 | 28 | 3 | 34 |
| 7.2-3. Несобственные интегралы | 3 | 31 | 4 сем | |
| 7.4. Эйлеровы интегралы | 2 | 33 | 4 сем | |
| 7.5. Свертка | 1 | 34 | 4 сем | |
| Резерв | 2 | 36 | 2 | 36 |
| СЕМЕСТР 4 | | | | |
| 7.3. Несобственные интегралы | 3 сем | | 2 | 2 |
| 7.4. Эйлеровы интегралы | 3 сем | | 1 | 3 |
| 7.5. Свертка | 3 сем | | 1 | 4 |
| 8. АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ В $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ | | | | |
| 8.1. Многообразия с краем и без | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 8.2. Гладкие многообразия | 3 | 5 | 3 | 9 |
| 8.3. Общие примеры многообразий | 2 | 7 | 2 | 11 |
| 8.4. Мера Лебега на многообразии | 2 | 9 | 3 | 14 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8.5. Ориентируемые многообразия | 4 | 13 | 2 | 16 |
| 8.6. Дифференциальные формы | 2 | 15 | 2 | 18 |
| 8.7. Операции над ДФ | 2 | 17 | 3 | 21 |
| 8.8. Интегрирование ДФ | 3 | 20 | 3 | 24 |
| 8.9. Интегральные формулы | 4 | 24 | 3 | 27 |
| 8.10. Приложения в физике | 1 | 25 | 1 | 28 |
| 9. ОСНОВЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА | | | | |
| 9.1. Ряды Фурье | 3 | 28 | 2 | 30 |
| 9.2. Преобразование Фурье | 4 | 32 | 2 | 32 |
| Резерв | 2 | 34 | 2 | 34 |

Отчетность:
Экзамен в каждом семестре. По результатам четырех экзаменов выставляется итоговая оценка, идущая в приложение к диплому. Самостоятельные и контрольные работы (в домашнем или аудиторном варианте) по отдельным темам.

# Литература

## Классика


1. *Архимед*. Сочинения. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Бернулли Д*. Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей. Л.: АН СССР, 1959.
3. *Бернулли И*. Избранные сочинения по механике. М.;Л.: ГТТИ, 1937.
4. *Коши О.Л*. Алгебраический анализ. Лейпциг, 1864.
5. *Коши О.Л*. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. СПб., 1831.
6. *Лейбниц Г.В*. Избранные отрывки из математических сочинений. Успехи математических наук. 1948. Т. III, вып.1. С. 165–205.
7. *де Лопиталь Г.Ф*. Анализ бесконечно малых. М.;Л.: ГТТИ, 1935.
8. *Ньютон И*. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989.
9. *Ньютон И*. Математические работы. М.;Л.: ОНТИ, 1937.
10. *Чезаро Э*. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. М.;Л.: ОНТИ, гл. ред. общетехн. лит., 1936.
11. *Эйлер Л*. Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1–2. М.: Физматгиз, 1961.
12. *Эйлер Л*. Дифференциальное исчисление. М.;Л.: ГТТИ, 1949.
13. *Эйлер Л*. Интегральное исчисление. Т. 1–3. М.: ГТТИ, 1956-1958.
14. *Эрмит Ш*. Курс анализа. М.;Л.: ОНТИ, гл. ред. общетехн. лит., 1936.

* * * * *

15. *Валле-Пуссен Ш.-Ж*. Курс анализа бесконечно малых. Т. 1–2. М.;Л.: ГТТИ, 1933.
16. *Гильберт Д*. Избранные труды. Т. 1–2. М.: Факториал, 1998.
17. *Гурса Э*. Курс математического анализа. Т. 1–3. М.;Л.: ГТТИ, 1932–1936.
18. *Курант Р*. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–2. М.: Наука, 1967–1970.
19. *Лебег А*. Интегрирование и отыскание примитивных функций. М.;Л.: ГТТИ, 1934.
20. *Лузин Н.Н*. Дифференциальное исчисление. М.: Высшая школа, 1961.
21. *Лузин Н.Н*. Интегральное исчисление. М.: Советская наука, 1949.
22. *Лузин Н.Н*. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1953.
23. *Лузин Н.Н*. Собрание сочинений. М.: Физматгиз, 1958.
24. *Лузин Н.Н*. Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1948.

25. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1–2. М.: Наука, 1990.
26. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1–5. М.: Физматгиз – Наука, 1959–1974.
27. *Халмош П.* Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
28. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.;Л.: ГТТИ, 1937.
29. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. М.: Физматлит, 2002–2003.

## Основные учебники и сборники задач

30. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
31. *Дьедоне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
32. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 1–2. М.: МЦНМО, 1998–2001.
33. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 1–2. М.: Наука, 1971–1982.
34. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 1–2. М.: МГУ, 1985.
35. *Камынин Л.И.* Курс математического анализа. Т. 1–2. М.: МГУ, 1993–1995.
36. *Клементьев З.И.* Курс лекции по теории функций действительного переменного. Томск: ТГУ, 1970.
37. *Клементьев З.И.* Лекции по математическому анализу. Вып. 1–5. Томск: ТГУ, 1975–1987.
38. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1–3. М.: Высшая школа, 1988–1989.
39. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1–2. М.: Мир, 1972.
40. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1–3. М.: Наука, 1969–1970.
41. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции нескольких переменных. Ч. 1–2. М.: Наука, 1972.

* * * * *

42. *Демидович Б.Н.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, 2002.
43. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. М.: Наука, 1984.
44. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды. М.: Наука, 1986.

45. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу: Функции нескольких переменных. М.: Дрофа, 2003.

46. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу. М.: Просвещение, 1981.

## Учебники

47. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.

48. *Берс Л.* Математический анализ. Т. 1–2. М.: Высшая школа, 1975.

49. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Мир, 1971.

50. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ. Киев: Вища школа, 1987.

51. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979.

52. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Математический анализ. М.: Наука, 1984.

53. *Куваев М.Р.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Ч. 1–3. Томск: ТГУ, 1967–1977.

54. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.

55. *Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф.* Математический анализ. Ч. 1–2. Киев: Вища школа, 1985.

56. *Пизо Ш., Заманский М.* Курс математики. Алгебра и анализ. М.: Наука, 1971.

57. *Райков Д.А.* Одномерный математический анализ. М.: Высшая школа, 1982.

58. *Рудин У.* Основы математического анализа, СПб.: Лань, 2002.

59. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

60. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 1–2. М.: Физматгиз, 1963.

61. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. 1–2. СПб.: Лань, 2001.

62. *Хинчин А.Я.* Краткий курс математического анализа. М.: ГТТИ, 1955.

## Сборники задач

63. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч.. Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Высшая школа, 1993.

64. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч.. Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. М.: Высшая школа, 1988.
65. *Виноградов И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн. 1–2. М.: Высшая школа, 2000.
66. *Дингельдей Ф.* Сборник упражнений и практических задач по интегральному исчислению. М.;Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1932.
67. *Жегалкин И.И., Слудская М.И.* Сборник задач по интегральному исчислению. М.: Учпедгиз, 1937.
68. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
69. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высшая школа, 1983.
70. *Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С.* Задачи по теории функций действительного переменного. М.: МГУ, 1997.
71. *Лефор Г.* Алгебра и анализ. Задачи. М.: Наука, 1973.
72. *Ляшко И.И., Боярчук* А.К., *Гай Я.Г., Головач Г.П.* Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 1–2. Киев: Выща школа, 1977.
73. *Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.* Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл. Киев: Вища школа, 1984.
74. *Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н.* Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.
75. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы анализа. Т. 1–2. М.: Наука, 1978.
76. *Ривкинд Я.И.* Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах. Минск: “Вышэйшая школа”, 1971.
77. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1980.
78. *Шмелев П.А.* Теория рядов в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1983.

## Справочники

79. *Бевз Г.П., Фильчаков П.Ф., Швецов К.И., Яремчук Ф.П.* Справочник по элементарной математике для поступающих в вузы. Киев: Наукова думка, 1972.
80. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1–3. М.: Наука, 1969-1974.
81. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
82. *Воднев В.Г., Наумович А.Ф., Наумович М.Ф.* Основные математические формулы. Минск: Вышэйшая школа, 1988.

83. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1986.
84. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1972.
85. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
86. *Гутер Р.С., Кудрявцев Л.Д., Левитан Б.М.* Элементы теории функций (СМБ). М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1949.
87. *Двайт Б.Г.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973.
88. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
89. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
90. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Русский язык, 1989.
91. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. Справочное руководство. М.: Наука, 1968.
92. *Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г.* Математика в понятиях, определениях и терминах. Ч. 1–2. М.: Просвещение, 1978–1982.
93. *Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г.* Толковый словарь математических терминов. М.: Просвещение, 1965.
94. Математическая энциклопедия. Т. 1–5. М.: Советская энциклопедия, 1977–1985.
95. Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988.
96. *Микиша А.М., Орлов В.Б.* Толковый математический словарь. М.: Русский язык, 1989.
97. *Прудников А.П., Брычков Ю.А.. Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
98. *Прудников А.П., Брычков Ю.А.. Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
99. *Прудников А.П., Брычков Ю.А.. Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
100. *Смолянский М.Л.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1967.
101. Справочник по специальным функциям, *Под ред. Абрамовица М. и Стиган И.*. М.: Наука, 1979.
102. *Фильчаков И.Ф.* Справочник по высшей математике. Киев: Наукова думка, 1973.

103. *Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г.* Математические формулы. М.: Наука, 1985.
104. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977.

## История математики

105. *Александрова Н.В.* Из истории векторного исчисления. М.: МАИ, 1992.
106. *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989.
107. *Боголюбов А.Н.* Математики. Механики. Киев: Наукова думка, 1983.
108. *Бородин А.Е., Бугай А.С.* Биографический словарь деятелей в области математики. Киев: Радянська школа, 1979.
109. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.
110. *Бюлер В.* Гаусс. Биографическое исследование. М.: Наука, 1989.
111. *Вавилов С.И.* Исаак Ньютон. М.: Наука, 1989.
112. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука: Математики древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: Физматгиз, 1959.
113. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Физматгиз, 1963.
114. *Виленкин Н.Я.* В поисках бесконечности. М.: Наука, 1983.
115. *Винер Н.* Я – математик. М.: Наука, 1967.
116. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Лаплас. М.: Наука, 1985.
117. *Глейзер Г.И.* История математики в школе. IX-X классы. М.: Просвещение, 1983.
118. *Гнеденко Б.В.* Очерки истории математики в России. М.: ГТТИ, 1946.
119. *Григорьян А.Т., Ковалев Б.Д.* Даниил Бернулли. М.: Наука, 1981.
120. История естествознания в России. Т. 1. Ч. 1. *Гл. ред. Фигуровкий Н.А.. М.*: изд. АН СССР, 1957.
121. История математики. Т. 1–3. *Под ред. Юшкевича А.П..* М.: Наука, 1970–1972.
122. История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М.:Наука,1971.
123. История отечественной математики. Т. 1–4. Киев: Наукова думка, 1966–1970.
124. *Канунов Н.Ф.* Федор Эдуардович Молин. М.: Наука, 1983.
125. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.
126. *Клайн М.* Математика. Поиск истины. М.: Мир, 1988.
127. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 1–2. М.: Наука, 1989.
128. *Коваль С.* От развлечения к знаниям. Математическая смесь, Варшава: Научно-техн. изд., 1972.
129. *Колмогоров А.Н.* Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991.

130. *Кольман Э.* История математики в древности. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.
131. *Круликовский Н.Н.* Из истории развития математики в Томске. Томск: ТГУ, 2006.
132. *Лишевский В.П.* Рассказы об ученых. М.: Наука, 1986.
133. *Лурье С.Я.* Архимед. М.;Л.: АН СССР, 1945.
134. Люди русской науки (очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники). М.;Л.: ОГИЗ, 1948.
135. *Медведев Ф.А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975.
136. *Медведев Ф.А.* Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974.
137. *Медведев Ф.А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.
138. *Медведев Ф.А.* Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982.
139. *Медведев Ф.А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв.. М.: Наука, 1976.
140. *Никифоровский В.А.* Великие математики Бернулли. М.: Наука,1984.
141. *Никифоровский В.А.* Из истории алгебры XVI-XVII вв.. М.: Наука, 1979.
142. *Никифоровский В.А.* Путь к интегралу. М.: Наука, 1985.
143. *Никифоровский В.А., Фрейман Л.С.* Рождение новой математики. М.: Наука, 1976.
144. *Ожигова Е.П.* Шарль Эрмит. М.: Наука, 1967.
145. Очерки развития математики в СССР. Киев: Наукова думка, 1983.
146. *Песин И.Н.* Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1966.
147. *Полищук Е.М.* Вито Вольтера. Л.: Наука, 1977.
148. *Полищук Е.М.* Эмиль Борель. Л.: Наука, 1980.
149. *Полищук Е.М., Шапошникова Т.О.* Жак Адамар. Л.: Наука, 1990.
150. Проблемы Гильберта, *Под ред. Александрова П.С.*. М.: Наука, 1969.
151. *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII-XIX веков. М.: Учпедгиз, 1956.
152. *Рид К.* Гильберт. М.: Наука, 1977.
153. *Сингх С.* Великая теорема Ферма. М.: МЦНМО, 2000.
154. *Сойер У.У.* Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972.
155. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.
156. *Тумаков И.М.* Анри Леон Лебег. М.: Наука, 1975.
157. *Тюлина И.А.* Жозеф Луи Лагранж. М.: Наука, 1977.
158. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей, *Под ред. Юшкевича А.П.*. М.: Наука, 1977.
159. *Цейтен Г.* История математики в древности и средние века. М.;Л.: ГТТИ, 1932.
160. *Цейтен Г.* История математики в XVI и XVII веках. М.;Л.: ГТТИ, 1933.

## Философия математики

161. *Адамар Ж.* Исследование психологии процессе изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970.
162. *Александров А.Д.* Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988.
163. *Александров П.С.* О призвании ученого. М.: МГУ, 1970.
164. *Бурова И.Н.* Парадоксы теории множеств и диалектика. М.: Наука, 1976.
165. *Вейль Г.* Математическое мышление. М.: Наука, 1989.
166. *Гнеденко Б.В.* Введение в специальность математика. М.: Наука, 1991.
167. *Киселева Н.А.* Математика и действительность. М.: МГУ, 1967.
168. *Колмогоров А.Н.* Математика – наука и профессия. (Библиотечка "Квант", Вып. 64). М.: Наука, 1988.
169. Методологический анализ оснований математики. М.: Наука, 1988.
170. *Молодший В.Н.* Очерки по философским вопросам математики. М.: Просвещение, 1969.
171. *Петров Ю.А.* Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. М.: Наука, 1967.
172. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
173. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970.
174. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1990.
175. *Реньи А.* Трилогия о математике. М.: Мир, 1980.
176. *Рузавин Г.И.* О природе математического знания. М.: Мысль1968.
177. *Свидерский В.И., Кармин А.С.* Конечное и бесконечное. М.: Наука, 1966.
178. *Сойер У.* Путь в современную математику. М.: Мир, 1972.
179. *Суворов Г.Д.* Об искусстве математического исследования. Донецк: ТЕАН, 1999.
180. *Сухотин А.К.* Философия в математическом познании. Томск: ТГУ, 1977.

## Дополнительная литература

181. *Акилов Г.П., Дятлов В.Н.* Основы математического анализа. Новосибирск: Наука, 1980.
182. *Акилов Г.П.. Макаров Б.М., Хавин В.П.* Элементарное введение в теорию интеграла. Л.: ЛГУ, 1969.
183. *Александров П.С.* Введение в общую теорию множеств и функций. М.: ГТТИ, 1957.
184. *Александров П.С.* Введение в общую теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
185. *Александров П.С., Колмогоров А.Н.* Введение в теорию функций действительного переменного. М.: ГТТИ, 1938.

186. *Александрян Р.А.. Мирзаханян Э.А.* Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.
187. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963.
188. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
189. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
190. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1–2. М.: Наука, 1982–1984.
191. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
192. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
193. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
194. *Билибин А.Я.* Курс математического анализа. Л.: Кубуч, 1933.
195. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1–2. М.;Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003.
196. *Борисович Ю.Г., Близняков Р.Б., Израилевич Я.Ф., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М.: Высшая школа, 1980.
197. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962.
198. *Брёкер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977.
199. *Брудно А.Л.* Теория функций действительного переменного. М.: Наука, 1971.
200. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1984.
201. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
202. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965.
203. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975.
204. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
205. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Физматгиз, 1968.
206. *Бурбаки Н.* Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Физматгиз, 1969.
207. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. М.: Мир, 1972.
208. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.
209. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных. уравнений. М.: Наука, 1972.
210. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

211. *Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1984.
212. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963.
213. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. М.: Наука, 1979.
214. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967.
215. *Вулих Б.З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1965.
216. *Геронимус Я.Л.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958.
217. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Т. 1–2. М.: Мир, 1984.
218. *Гихман И.И.* Введение в общую теорию меры и интеграла. Донецк: ДГУ, 1971.
219. *Гливенко В.И.* Интеграл Стилтьеса. М.;Л.: ГТТИ, 1936.
220. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977.
221. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
222. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
223. *Гохман Э.Х.* Интеграл Стилтьеса и его применения. М.: Физматгиз, 1958.
224. *Гребенча М.К., Новоселов С.И.* Курс математического анализа. Ч.1. Функции одного переменного. М.: Учпедгиз, 1941, Ч.2. Учпедгиз, 1953.
225. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
226. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ИЛ, 1948.
227. *Джилмор Р.* Теория катастроф для ученых и инженеров. М.: Мир, 1983.
228. *Дороговцев А.Я.* Элементы общей теории меры и интеграла. Киев: Вища школа, 1989.
229. *Дубровин Г.И., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
230. *Дьяченко М.И., Ульянов П.Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
231. *Ефимов А.В.* Математический анализ (Специальные разделы). Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение. М.: Высшая школа, 1980.
232. *Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М.* Математический анализ (Специальные разделы). Ч. 2. Применение некоторых методов математического и функционального анализа. М.: Высшая школа, 1980.
233. *Заманский М.* Введение в современную алгебру и анализ. М.: Наука, 1974.

234. *Зельдович Я.Б.. Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967.
235. *Зельдович Я.Б., Яглом И.М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. М.: Наука, 1982.
236. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1–2. М.: Мир, 1965.
237. *Иванов В.В.* Топология арифметического пространства и непрерывные отображения. Новосибирск: НГУ, 1987.
238. *Иванов В.В.* Элементарное введение в теорию степени. Ч. I-IV, Новосибирск: НГУ, 1982.
239. *Камке Е.* Интеграл Лебега–Стилтьеса. М.: Физматгиз, 1959.
240. *Кан В.И., Куваев М.Р., Невидимова М.И., Поломошнова Р.С.* Избранные главы методики преподавания математики в вузе. Томск: ТГУ, 1981.
241. *Кан В.И., Куваев М.Р., Невидимова М.И., Поломошнова Р.С.* Множества и функции. Томск: ТГУ, 1981.
242. *Канторович Л.В.* Определенные интегралы и ряды Фурье. Л.: ЛГУ, 1940.
243. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
244. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976.
245. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.
246. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1971.
247. *Келли Дж.Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981.
248. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
249. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М.: Наука, 1987.
250. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
251. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
252. *Колодий А.М.* Основы общей теории меры и интеграла, Волгоград: ВГУ, 1999.
253. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: АН СССР, 1951.
254. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. М.: ИЛ, 1963.
255. *Крейн С.Г., Ушакова В.Н.* Математический анализ элементарных функций. М.: Физматгиз, 1963.
256. *Куратовский К.. Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
257. *Ландау Э.* Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

258. *Ландау Э.* Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. М.: ИЛ, 1948.
259. *Ландау Э.* Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Гостехиздат, 1948.
260. *Лаптев Г.Ф.* Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1975.
261. *Либ Э., Лосс М.* Анализ. Новосибирск: Научная книга, 1998.
262. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
263. *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: ИЛ, 1956.
264. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1965.
265. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
266. *Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р.* Математический анализ. Вычисление элементарных функций. (СМБ). М.: Физматгиз, 1963.
267. *Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К.* Основы классического и современного математического анализа. Киев: Выща школа, 1985.
268. *Макаров Б.М., Флоринская Л.В.* Теория меры и интеграла. Вып. 1: Мера. Измеримые функции. Л.: ЛГУ, 1974.
269. *Макаров Б.М., Флоринская Л.В.* Теория меры и интеграла. Вып. 3: Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра. Л.: ЛГУ, 1974.
270. *Макаров И.П.* Дополнительные главы математического анализа. М.: Просвещение, 1968.
271. *Мантуров О.В.* Элементы тензорного исчисления. М.: Просвещение,1991.
272. *Маркушевич А.И.* Ряды. Элементарный очерк. М.: Наука, 1979.
273. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1972.
274. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: МГУ, 1980.
275. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.
276. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной, СПб.: Лань, 1999.
277. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.;Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1937.
278. *Некрасов В.Л.* Строение и мера линейных точечных областей. Томск: Томский Технологический институт, 1907.
279. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.
280. *Новиков С.П., Фоменко Ф.Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987.

281. *Очан Ю.С.* Интеграл. М.: МГПИ, 1973.
282. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983.
283. *Пестов Г.Г.* Дифференцируемые отображения в конечномерных пространствах. Томск: ТГУ, 1983.
284. *Попов Ю.П., Пухначев Ю.В.* Математика в образах. М.: Знание, 1989.
285. *Порошкин А.Г.* Теория меры и интеграла. Сыктывкар: СГУ, 1996.
286. *Поссе К.* Курс дифференциального и интегрального исчислений, СПб., 1912.
287. *Поссе К., Привалов И.* Курс дифференциального исчисления. М.;Л.: Гостехиздат, 1938.
288. *Поссе К., Привалов И.* Курс интегрального исчисления. М.;Л.: Гостехиздат, 1939.
289. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
290. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
291. *Привалов И.И., Гальперин С.А.* Основы анализа бесконечно малых. М.;Л.: Изд-во техн.-теорет. лит., 1949.
292. *Райхмист Р.Б.* Графики функций. М.: Высшая школа, 1991.
293. *де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956.
294. *Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию интеграла Лебега. Новосибирск: НГУ, 1975.
295. *Решетняк Ю.Г.* Лекции по математическому анализу. Математический анализ на многообразиях. Новосибирск: НГУ, 1972.
296. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.
297. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
298. *Романовский П.И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Наука, 1964.
299. *Рыбасенко В.Д., Рыбасенко И.Д.* Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики. М.: Наука, 1987.
300. *Савелов А.А.* Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960.
301. *Салехов Г.С.* Вычисление рядов. М.: Гостехиздат, 1955
302. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: МГУ, 1986.
303. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
304. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
305. *Серебренников М.Г.* Гармонический анализ. М.: ГТТИ, 1948.
306. *Снеддон Н.* Преобразование Фурье. М.: Изд. иностр. лит., 1955.

307. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968.
308. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
309. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
310. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971.
311. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1971.
312. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
313. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
314. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М.* Основы начального курса математики. М.: Просвещение, 1988.
315. *Столл Р.Р.* Множества. Логика. Математические теории. М.: Просвещение, 1968.
316. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
317. *Тиман А.Ф., Трофимов В.Н.* Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.
318. *Тимофеев А.Ф.* Интегрирование функций. М.;Л.: ГТТИ, 1948.
319. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интеграла Фурье. М.;Л.: ГТТИ, 1948.
320. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
321. *Толстов Г.П.* Курс математического анализа, Т. 1–2. М.: Гостехиздат, 1957.
322. *Толстов Г.П.* Мера и интеграл. М.: Наука, 1976.
323. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
324. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985.
325. *Уваренков И.М.. Маллер М.З.* Курс математического анализа. Т. 1–2. М.: Просвещение, 1966-1967.
326. *Уитни Х.* Геометрическая теория интегрирования. М.: ИЛ, 1960.
327. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
328. *Феферман С.* Числовые системы. М.: Наука, 1971.
329. *Фихтенгольц Г.М., Натансон И.П.* Криволинейные и кратные интегралы. М.;Л.: ОНТИ, НКТП, гл. ред. техн.-теорет. лит., 1937.
330. *Флоринская Л.В., Хавин В.П.* Теория меры и интеграла. Вып. 2: Интеграл, Л.: ЛГУ, 1975.
331. *Франклин Ф.* Математический анализ, Ч. 1,2. М.: Иностр. лит., 1950.
332. *Фролов Н.А.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Учпедгиз, 1955.
333. *Фролов Н.А.* Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1961.

334. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изометрии. М.: Наука, 1966.
335. *Харди Г.Х.* Курс чистой математики. М.: ИЛ, 1949.
336. *Харди Г.Г., Литтльвуд Х., Полиа Г.В.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
337. *Харди Х.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
338. *Харди Х., Рогозинский В.В.* Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1962.
339. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа. М.: Мир, 1983.
340. *Хейер Х.* Вероятностные меры на локально компактных группах. М.: Мир, 1981.
341. *Хинчин А.Я.* Восемь лекций по математическому анализу. М.: Наука, 1977.
342. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1–2. М.: Наука, 1975.
343. *Цецохо В.А.* Теория меры и интеграл Лебега. Новосибирск: НГУ, 1974.
344. *Шерстнев А.Н.* Конспект лекций по математическому анализу. Казань: КГУ, 1998.
345. *Шестаков А.А.. Малышева И.А., Полозков Д.П.* Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1987.
346. *Шилов Г.Е.* Лекции по векторному анализу. М.: ГТТИ, 1954.
347. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматгиз, 1961.
348. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл. Мера и производная. М.: Наука, 1967.
349. *Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь.* Интеграл. Мера и производная на линейных пространствах. М.: Наука, 1967.
350. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
351. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1–2. М.: Мир, 1985.
352. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и применения. М.: Мир, 1969.
353. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
354. *Янпольский А.Р.* Гиперболические функции. М.: Физматгиз, 1960.
355. *Янушаускас А.И.* Кратные тригонометрические ряды. Новосибирск: Наука, 1986.

# Путеводитель по литературе

## ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ



## 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

## 4. МЕРА И ИНТЕГРАЛ

## 5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Равномерная сходимость [18], [29], [32], [33], [37], [38], [39], [40], [47], [49], [54], [55], [57], [58], [59], [60], [61], [200], [202], [213], [231], [320], [325], [341].
Сходимость в среднем . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .[55], [202].
Степенные ряды . [18], [29], [33], [37], [38], [40], [49], [54], [55], [57], [58], [59], [60], [61], [200], [202], [213], [231], [298], [320], [325], [341].
Ряды в нормированных пространствах . . . . . . . . . . . . . . . . . . [39], [55].
Дополнения и применения .[21], [29], [30], [31], [39], [55], [75], [296], [336].

## 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Действительные отображения . . .[18], [25], [29], [33], [34], [37], [38], [41], [47], [49], [53], [54], [59], [61], [200], [203], [341].
Отображения из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$ . . [32], [35], [38], [49], [58], [238], [283], [311].
Отображения нормированных пространств . . . . . . .[31], [32], [34], [39], [41], [209], [210], [243], [251], [264], [265], [339].
Особенности дифференцируемых отображений . . . . . . . . .[189], [190], [198], [217], [220], [290], [324].
Условный экстремум . . . . . . [29], [32], [33], [34], [35], [37], [38], [39], [53], [54], [59], [61].
Замена переменного в кратном интеграле .[18], [25], [29], [32], [33], [38], [39], [41], [54], [58], [59], [61], [195], [201], [202], [275], [294], [311], [330].
Дополнения . . . . . . . .[20], [29], [30], [33], [34], [48], [62], [238], [275], [281], [286], [300], [326], [327].

## 7. ИНТЕГРАЛ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРА

Интеграл Римана, зависящий от параметра . . . . . . . . . . .[18], [25], [29], [32], [33], [38], [40], [47], [53], [54], [55], [59], [60] [61], [202].
Интеграл Лебега, зависящий от параметра . . . . . . . . . [59], [228], [308].
Несобственный интеграл Римана
[18], [25], [29], [32], [33], [34], [38],
[40], [53], [54], [59], [60], [61], [200], [202], [294], [341].
Несобственный интеграл Лебега . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . [39].
Кратный несобственный интеграл Римана . . . . . . . . . . . [18], [25], [32], [33], [38], [41], [59], [202], [346].
Несобственный интеграл Римана, зависящий от параметра . [18], [25], [29], [32], [33], [38], [47], [53], [54], [55], [61], [202].

8. АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ

## 9. ОСНОВЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

## Курсовая работа

Курсовая работа является существенным элементом обучения курсу математического анализа для студентов специальности 01.01.00. Работа, выполняется в четвертом семестре под руководством преподавателей кафедры.

Цель курсовой работы научиться работать самостоятельно с математической литературой, оформлять математический текст, выступать с научным докладом.

Работа над темой предполагает обязательное изучение литературы и может содержать элементы самостоятельного исследования. Выбрав тему из предложенного списка, студент обращается к одному из возможных руководителей работой над этой темой. Содержание работы, её объем и порядок выполнения конкретизируется совместно с руководителем.

Выполнение курсовой работы завершается представлением текста (в печатном или рукописном виде) и защитой. Защита работы проводится на заседаниях комиссии, создаваемой распоряжением заведующего кафедрой, либо в форме выступления на заседании одного из научных семинаров кафедры или на студенческой научной конференции (при наличии достаточного объема самостоятельных исследований). По итогам защиты руководителем проставляется оценка. Защиты курсовых работ студентами заканчиваются не позднее 14 мая.

При желании тему курсовой работы можно получить уже на первом курсе.

Список тем курсовых работ с указанием возможных руководителей приводится ниже.

1. Аксиоматика Цермело–Френкеля теории множеств. (Г.Г. Пестов)
2. Алгебраическая структура пространства $\Lambda^p\left(\mathbb{R}^n\right)$. (Г.В. Сибиряков)
3. Альтернативные доказательства теоремы о неявных отображениях. (Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)
4. Альтернативные доказательства теоремы о замене переменного в кратном интеграле Лебега. (Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)
5. Аналог теоремы о сечениях для меры на многообразии. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
6. Аналог теоремы о сечениях для меры на многообразии. (Г.В. Сибиряков)

7. Асимптотические ряды. (А.Н. Малютина)
8. Базисы в конкретных банаховых пространствах (Г.В. Сибиряков)
9. Банахова алгебра $L_1(\mathbb{R})$ суммируемых функций. (Г.В. Сибиряков)
10. Банахово пространство скалярных (векторных) мер на данной $\sigma$ - алгебре. (Г.В. Сибиряков)
11. Безусловно сходящиеся ряды в банаховом пространстве. Теорема о повторных рядах. (Т.В. Емельянова, Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)
12. Бесселевы отображения. (А.Н. Малютина)
13. Бесконечные произведения. (Б.В. Соколов)
14. Борелевские множества в метрических пространствах, их подпространствах и произведениях. (Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков)
15. Вариация скалярной или векторной меры. (Т.В. Емельянова)
16. Введение тригонометрических отображений при помощи функциональных уравнений. (Т.В. Касаткина, Ю.А. Мартынов)
17. Введение тригонометрических отображений при помощи степенных рядов. (Т.В. Касаткина, А.Н. Малютина, Ю.А. Мартынов)
18. Введение тригонометрических отображений через первообразные для отображений $f(x)=1/(1+x^2)$ и $g(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ . (Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)
19. Вклад Леонарда Эйлера в развитие математического анализа. (И.А. Александров)
20. Вклад Хенрика Абеля в развитие теории рядов. (И.А. Александров, Н.А. Исаева)
21. Вторая производная и формула Тейлора второго порядка. (С.А. Копанев)
22. Второй метод интегрирования по частям (включая формулу Грина). (Г.В. Сибиряков)
23. Вывод некоторых уравнений математической физики. (А.Н. Малютина)
24. Гамма-отображение. (Т.В. Емельянова, Н.А. Исаева)
25. Гармонический анализ. Вычислительные методы. (И.А. Александров, А.Н. Малютина, Г.В. Сибиряков)
26. Геометрический смысл Якобиана. (Г.Г. Пестов, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
27. Гиперболическая метрика в единичном круге. (Б.В. Соколов)
28. Гиперболическая мера и метрика. (А.Н. Малютина)
29. Гипотеза Пуанкаре и теорема Пуанкаре–Перельмана. (И.А. Александров)
30. Гомотопия непрерывных отображений. (Г.В. Сибиряков)

31. Двойные числовые и функциональные ряды.
(Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)
32. Дифференциальные операции 2-го порядка в теории поля.
(Г.В. Сибиряков)
33. Дифференциальные формы, применяемые в механике и в физике.
(Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
34. Дробно-линейные отображения на плоскости.
(И.А. Александров, С.А. Копанев, Л.С. Копанева)
35. Замечания к теореме о производной композиции. (Ю.А. Мартынов)
36. Замечательные кривые и поверхности.
(Л.С. Копанева, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
37. Интеграл Бохнера от векторного отображения по скалярной мере.
(Т.В. Емельянова, Г.В. Сибиряков)
38. Интеграл Лебега–Стилтьеса и его свойства.
(Т.В. Касаткина, Л.С. Копанева, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков)
39. Интегральные экспонента, логарифм, синус и др.. (Г.В. Сибиряков)
40. Интегралы, зависящие от параметра.
(Н.А. Исаева, Т.В. Касаткина, Л.С. Копанева, Б.В. Соколов)
41. Интегрирование по скалярной мере. (Г.В. Сибиряков)
42. Иррациональность $e^r$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. (Ю.А. Мартынов)
43. Исследование конкретных отображений $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
44. Исследование “неберущихся” интегралов.
(Н.А. Исаева, Э.Н. Кривякова)
45. Исследование отображения, заданного неявно системой уравнений.
(Т.В. Касаткина, Л.С. Копанева, Г.Г. Пестов, Г.В. Сибиряков)
46. Исчисление бесконечно малых. (И.А. Александров)
47. “Контрпримеры” к теореме Фубини. (Т.В. Емельянова, Б.В. Соколов)
48. Кривые Пеано. (Ю.А. Мартынов, Г.В. Сибиряков)
49. Критерии компактности множества в конкретных пространствах. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
50. Лемма Цорна. Различные эквивалентные формулировки и доказательства. (Г.Г.Пестов, Г.В. Сибиряков)
51. Логарифмическое отображение на действительной оси и на комплексной плоскости. (И.А. Александров, Т.В. Касаткина, Л.С. Копанева)
52. Мера Жордана. (Э.Н. Кривякова)
53. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ как инвариант движений. (Т.В. Емельянова)
54. Мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функций ограниченной вариации. (Л.С. Копанева, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков)

55. Мера Лебега–Стилтьеса на плоскости.
(Т.В. Касаткина, Л.С. Копанева, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков)

56. Мера Хаара в локально компактной абелевой группе.
(Г.В. Сибиряков)

57. Мера шара, шарового слоя, параллелепипеда, конуса в $\mathbb{R}^n$.
(Т.В. Касаткина, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков)

58. Методы разложения отображений в степенные ряды.
(И.А. Александров, Л.С. Копанева, А.Н. Малютина, Б.В. Соколов)

59. Метрическое пространство, порожденное пространством с мерой. (Г.В. Сибиряков)

60. Модуль семейства кривых. (А.Н. Малютина)

61. Мощности множества непрерывных функций, множества монотонных функций, множества выпуклых функций и других.
(Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)

62. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы непрерывная биекция $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$ переводила измеримые по Лебегу множества в измеримые по Лебегу множества. (С.А. Копанев)

63. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} p_m(n)\frac{x^n}{n!}$, где $p_m(n)$ многочлен степени $m$.
(Т.В. Емельянова)

64. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве. (Г.В. Сибиряков)

65. Некоторые приложения определенных интегралов.
(Б.В. Соколов)

66. Некоторые свойства гармонических функций. (Б.В. Соколов)

67. Некоторые свойства дифференцируемых отображений $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Обобщения. (Б.В. Соколов)

68. Непрерывное нигде не дифференцируемое отображение.
(Т.В. Касаткина, Ю.А. Мартынов, Г.Г. Пестов)

69. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства $L_p$, $p\ge 1$.
(А.Н. Малютина, Г.В. Сибиряков)

70. Несобственный интеграл по мере Лебега–Стилтьеса.
(Т.В. Касаткина)

71. Нестандартная модель поля действительных чисел (через ультрастепени). (Г.Г. Пестов)

72. Нестягиваемость кольца, поверхности цилиндра и проколотой плоскости. (Г.В. Сибиряков)

73. Нигде не дифференцируемые непрерывные функции образуют в пространстве $C[a,b]$ множество 2-й категории. (Г.В. Сибиряков)

74. Обзор методов суммирования рядов. (И.А. Александров, Б.В. Соколов)

75. Область сумм условно сходящегося ряда комплексных чисел (или элементов евклидова пространства). (Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)

76. Обобщенные производные. (А.Н. Малютина)

77. Общее понятие дифференцируемого многообразия и его вложение в евклидово пространство. (Г.В. Сибиряков)

78. Ограниченные и неограниченные линейные операторы. (Г.В. Сибиряков)

79. О классе отображений, интегрируемых по Риману. (С.А. Копанев, Л.С. Копанева)

80. Операции над рядами. (И.А. Александров, Т.В. Касаткина, Б.В. Соколов)

81. Ординалы. Определения и свойства. Трансфинитная индукция. (Г.Г. Пестов, Г.В. Сибиряков)

82. Ортогональные системы и ортогональные ряды. (Г.В. Сибиряков)

83. Ортогональные системы функций. (И.А. Александров, Г.В. Сибиряков)

84. Основные типичные особые точки многомерных отображений. (Г.В. Сибиряков)

85. Основы дифференциального исчисления в банаховом пространстве. Касаткина, С.А. Копанев, Г.В. Сибиряков)

86. Особые приемы вычисления несобственных интегралов. (Б.В. Соколов)

87. Отображение ограниченной вариации. (А.Н. Малютина, Ю.А. Мартынов)

88. Повторные и двойные пределы. (Т.В. Емельянова, Н.А. Исаева, Б.В. Соколов)

89. Параболические, экспоненциальные, логарифмические и другие асимптоты. (Г.В. Сибиряков)

90. Показать, что $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n$ стремится к некоторому пределу $\gamma$ при $n \to \infty$, причем $0 < \gamma \le 1$. (И.А. Александров, Г.Г. Пестов, Б.В. Соколов)

91. Показательное отображение комплексного переменного. (И.А. Александров, Л.С. Копанева)

92. Понятие степени отображения. (А.Н. Малютина)

93. Последовательность чисел Фибоначчи и другие рекуррентные последовательности. (И.А. Александров, Г.В. Сибиряков)

94. Построение множества вещественных чисел по Дедекинду. (Б.В. Соколов)

95. Построение множества вещественных чисел по Кантору. (Г.В. Сибиряков)

96. Построить две измеримые функции, композиция которых неизмерима. (Г.В. Сибиряков)

97. Преобразование Фурье в пространстве быстро убывающих функций и в пространстве медленно растущих обобщенных функций. (Г.В. Сибиряков)

98. Преобразование Фурье суммируемых функций. (А.Н. Малютина, Г.В. Сибиряков)

99. Приемы разложения в ряд Тейлора. (Т.В. Емельянова, Л.С. Копанева, Б.В. Соколов)

100. Признаки равномерной сходимости рядов и интегралов. (Т.В. Емельянова, Г.В. Сибиряков)

101. Признаки сходимости рядов Фурье. (Т.В. Емельянова, Л.С. Копанева, А.Н. Малютина, Б.В. Соколов)

102. Приложение программного пакета “Математика 6” к математическому анализу. (Т.В. Касаткина)

103. Приложения интеграла в естественных науках. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

104. Приложения интеграла 1–го рода в естественных науках. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

105. Приложения интеграла 2-го рода в естественных науках. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

106. Приложения степенных рядов. (И.А. Александров, Л.С. Копанева, А.Н. Малютина, Б.В. Соколов)

107. Применения градиента, дивергенции и ротора в физике. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

108. Применения производной и дифференциала в естественных науках. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

109. Применение рядов к вычислению пределов, производных, интегралов. (Т.В. Емельянова, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

110. Применение степенных рядов для решения дифференциальных уравнений. (Б.В. Соколов)

111. Пример непрерывного на сегменте действительного отображения, у которого мера образа множества нулевой меры не равна нулю. (Ю.А. Мартынов, Г.Г. Пестов)

112.Пример отображения $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, непрерывного на $A$ и разрывного на $B$, где $A,B$ -- всюду плотные в [0,1] континуумы, $A\bigcup B=[0,1]$. (Ю.А. Мартынов)

113.Примеры многообразий в естественных науках. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

114.Примеры неизмеримых отображений для конкретных σ-алгебр. (Г.В. Сибиряков)

115. Примеры неориентируемых многообразий. (С.А. Копанев)

116.Примеры ортогональных координат в $\mathbb{R}^n$. (И.А. Александров, Г.В. Сибиряков)

117.Примеры потенциальных и соленоидальных полей в приложениях. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

118.Примеры сепарабельных и несепарабельных метрических пространств. (Г.В. Сибиряков)

119.Принцип неподвижной точки и его применения. (Т.В. Касаткина, А.Н. Малютина)

120.Принцип открытости отображения и его применения. (Г.В. Сибиряков)

121.Принцип продолжения по непрерывности и его применения. (А.Н. Малютина, Г.В. Сибиряков)

122.Принцип равномерной ограниченности и его применения. (Г.В. Сибиряков)

123. Принцип трансфинитной индукции и его применение к определению порядковых чисел $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ и $\alpha^{\beta}$. (Г.В. Сибиряков)

124.Продолжение Г-отображения на комплексную плоскость. (Т.В. Касаткина)

125. Произведение пространств с мерой. (Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков)

126.Пространства последовательностей. Сходимость последовательностей в этих пространствах и другие свойства их геометрии. (Г.В. Сибиряков)

127.Пространство отображений, интегрируемых в смысле Римана. Его неполнота. Пополнение как способ построения интеграла Лебега. (Л.С. Копанева, Б.В. Соколов)

128.Пусть $\alpha$ есть иррациональное число. Доказать, что множество дробных частей чисел $n\alpha$, где $n$ пробегает множество натуральных чисел, всюду плотно на сегменте [0,1]. (Г.Г. Пестов)

129. Пусть отображение $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет ограниченную производную: $|g'|\le M$. Доказать, что отображение $f(x)=x+\varepsilon g(x)$ биективно для малых положительных $\varepsilon$. (С.А. Копанев)

130. Пусть счетное множество $E\subset[0,1]$. Построить отображение на $[0,1]$, разрывное в каждой точке $E$ и непрерывное на $[0,1]\setminus E$. (Г.Г. Пестов)

131. Пусть числовое отображение равномерно непрерывно на $\mathbb{R}$. Доказать, что существуют $a,b\in\mathbb{R}^+$ такие, что $|f(x)|\le a|x|+b$. (С.А. Копанев)

132. Равномерная сходимость: примеры и контрпримеры. (Т.В. Емельянова, Т.В. Касаткина, Э.Н. Кривякова, А.Н. Малютина, Б.В. Соколов)

133. Раздельная непрерывность и непрерывность по совокупности переменных. (Т.В. Емельянова, Б.В. Соколов)

134. Различные виды остаточного члена в формуле Тейлора. (Т.В. Емельянова, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

135. Разложения Жордана, Хана и Лебега (неотрицательной, вещественной и соответственно скалярной меры). (С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова, Г.В. Сибиряков)

136. Расходящиеся ряды. Методы их суммирования. (И.А. Александров, Н.А. Исаева, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)

137. Ряды в нормированном пространстве. (Г.В. Сибиряков)

138. Ряды Дирихле. (С.А. Копанев, А.Н. Малютина)

139. Ряды с нелинейной областью сумм. (Г.В. Сибиряков)

140. Ряды Фурье–Лежандра по многочленам Лежандра. (Г.В. Сибиряков)

141. Ряды Фурье–Уолша. (Г.В. Сибиряков)

142. Свойства интеграла Лебега. (Э.Н. Кривякова)

143. Свойства множества точек разрыва и точек непрерывности числовых отображений. (Ю.А. Мартынов)

144. Связные и линейно связные множества и пространства. (И.А. Александров, С.А. Копанев)

145. Сигма-алгебра, порожденная компактами. Ее поведение при переходе к подпространству или к произведению пространств. (Г.В. Сибиряков)

146. Сигма-алгебра, порожденная открытыми шарами. Ее поведение при переходе к подпространству или к произведению пространств. (Г.В. Сибиряков)

147. Сигма-алгебра, порожденная семействами функций. (Г.В. Сибиряков)

148. Сигма-алгебра цилиндрических множеств в $C[a,b]$. (Т.В. Емельянова, Г.В. Сибиряков)

149. Системы функций Радемахера и Хаара. (Г.В. Сибиряков)

150.Совершенные множества в $\mathbb{R}^n$. Примеры совершенных множеств.
(Т.В. Емельянова, Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
151.Соответствия между операциями над векторными (скалярными) полями и над соответствующими дифференциальными формами.
(Г.В. Сибиряков)
152.Специальные отображения. (Т.В. Касаткина)
153.Степенные ряды от нескольких переменных.
(Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
154.Стереографическое проецирование.
(И.А. Александров, С.А. Копанев, Л.С. Копанева, Б.В. Соколов)
155.Суммирование расходящихся интегралов методом Пуассона–Абеля.
(Н.А. Исаева, Г.В. Сибиряков)
156.Суммирование расходящихся интегралов методом Чезаро.
(Н.А. Исаева, Г.В. Сибиряков)
157.Суммирование числовых рядов методами Чезаро, Пуассона-Абеля и др. (Г.В. Сибиряков)
158.Сферическая мера и метрика. (Л.С. Копанева, А.Н. Малютина)
159.Сходимость по мере. Метрика сходимости по мере. Теорема Егорова. (Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
160.Теорема Бэра о категориях и ее применения.
(Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)
161.Теорема Брауэра об инвариантности области.
(С.А. Копанев, Г.В. Сибиряков)
162.Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами. (Г.В. Сибиряков)
163.Теорема Н.Е.Жуковского о подъемной силе крыла. (С.А. Копанев)
164.Теорема Лебега–Радона–Никодима об обобщенной мере в $\mathbb{R}^n$.
(С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова)
165.Теорема Лузина. (С.А. Копанев, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
166.Теорема о существовании неизмеримых подмножеств в любом множестве положительной меры Лебега. (Г.Г. Пестов)
167.Теорема Пифагора для меры параллелограмма и его проекций и ее обобщения на многообразия. (Г.В. Сибиряков)
168.Теорема Сарда и ее применения. (Г.В. Сибиряков)
169.Теорема Стоуна–Вейерштрасса. (С.А. Копанев, Г.В. Сибиряков)
170.Теорема Таубера и тауберовы теоремы. (Г.В. Сибиряков)
171.Теорема Фейера для пространств суммируемых функций.
(Г.В. Сибиряков)
172.Теорема Фубини для произвольных пространств с мерой.
(Т.В. Емельянова)

173. Теоремы о конечных приращениях для кривых. (Г.В. Сибиряков)
174. Теоремы о среднем в интегральном исчислении. (Т.В. Касаткина)
175. Теоремы Урысона и Титце–Урысона. (Г.В. Сибиряков)
176. Теория рядов – частный случай теории интеграла. (Г.В. Сибиряков)
177. Теория степени $a^{\alpha}$, где $a > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. (Л.С. Копанева)
178. Топология пространства Шварца. (Г.В. Сибиряков)
179. Точки конденсации. Мощность замкнутого множества. (Г.В. Сибиряков)
180. Траектория. Кривая. Линия. (И.А. Александров, Э.Н. Кривякова)
181. Трансцендентные числа. Трансцендентность чисел $e$ и $\pi$. (Г.В. Сибиряков)
182. Тригонометрические отображения комплексного переменного. (И.А. Александров)
183. Ультраметрическое пространство. Пространства Бэра и пространство рациональных чисел с $p$-адической метрикой. (Г.В. Сибиряков)
184. Уравнение Риккати. (А.Н. Малютина)
185. Уравнения Максвелла. (Г.В. Сибиряков)
186. Условие метризуемости произведения метрических пространств. (Г.В. Сибиряков)
187. Фильтры, ультрафильтры, их свойства. Предел отображения по фильтру (по базе). (Г.Г. Пестов, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
188. Формула Стирлинга. (И.А. Александров, Т.В. Касаткина)
189. Фундаментальные группы и их применение к гомеоморфной классификации метрических пространств. (Г.В. Сибиряков)
190. Функциональные ряды в пространство непрерывных отображений. (И.А. Александров, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
191. Функциональные ряды в пространстве суммируемых функций. (И.А. Александров, Г.В. Сибиряков, Б.В. Соколов)
192. Функциональные уравнения и их применение к теории элементарных функций. (Т.В. Касаткина, Ю.А. Мартынов, Г.В. Сибиряков)
193. Экспонента от матрицы. Экспонента в банаховой алгебре. (А.Н. Малютина, Г.В. Сибиряков)
194. Экстремальная длина семейства кривых. (А.Н. Малютина)
195. Элементарные отображения в банаховой алгебре. (Т.В. Касаткина, Г.В. Сибиряков)
196. Эллиптические интегралы. (А.Н. Малютина, Л.С. Копанева, Б.В. Соколов)
197. Якобиан, свойства и применения. (И.А. Александров, Б.В. Соколов)
198. $L_2$-теория (теорема Планшереля) для преобразования Фурье. (Г.В. Сибиряков)

**Г.В.СИБИРЯКОВ**

# *АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА*

## §1. Аксиомы поля

1.1. Определение. Множество $\mathsf{R}$ называется *полем*, если в нем введены две операции: *сложение* и *умножение*, т.е. для любых элементов $a$ и $b \in \mathsf{R}$ определены их *сумма* $a+b \in \mathsf{R}$ и *произведение* $ab = a \cdot b \in \mathsf{R}$, причем так, что выполнены перечисленные ниже условия (С1)÷(С4) и (У1)÷(У5) (*аксиомы поля*):

Аксиомы сложения:

(С1) *Сложение коммутативно*: $\forall a,b \in \mathsf{R}: a+b = b+a$.

(С2) *Сложение ассоциативно*: $\forall a,b,c \in \mathsf{R}: a+(b+c) = (a+b)+c$.

(С3) *Существует нуль*: $\exists! \mathit{0} \in \mathsf{R}\ \forall a \in \mathsf{R}: a+\mathit{0} = \mathit{0}+a = a$.

(С4) *Сложение обратимо*: $\forall a \in \mathsf{R}\ \exists! z \in \mathsf{R}: a+z = z+a = \mathit{0}$.

Аксиомы умножения:

(У1) *Умножение коммутативно*: $\forall a,b \in \mathsf{R}: ab = ba$.

(У2) *Умножение ассоциативно*: $\forall a,b,c \in \mathsf{R}: a(bc) = (ab)c$.

(У3) *Существует единица*: $\exists! \mathit{1} \in \mathsf{R} \setminus \{\mathit{0}\}\ \forall a \in \mathsf{R}: a\mathit{1} = \mathit{1}a = a$.

(У4) *Умножение обратимо*: $\forall a \in \mathsf{R} \setminus \{\mathit{0}\}\ \exists! z \in \mathsf{R}: az = za = \mathit{1}$.

(У5) *Умножение дистрибутивно относительно сложения*:

$$\forall a,b,c \in \mathsf{R}: a(b+c) = ab+ac.$$

Элемент $z \in \mathsf{R}$ такой, что $a+z = z+a = \mathit{0}$, называется *противоположным к элементу* $a$ и обозначается $-a$. Если $a$ и $b \in \mathsf{R}$, то сумма $a+(-b)$ обозначается $a-b$ и называется *разностью* элементов $a$ и $b \in \mathsf{R}$. Операция, сопоставляющая каждой паре элементов $a$ и $b \in \mathsf{R}$ их разность $a-b$, называется *вычитанием*.

Если $a \in \mathsf{R} \setminus \{\mathit{0}\}$, то элемент $z \in \mathsf{R}$ такой, что $az = za = \mathit{1}$, называется *обратным к элементу* $a$ и обозначается $a^{-1}$. Элемент $a$ в этом случае оказывается обратным к элементу $z$, так что элементы $a$ и $z$ *взаимно обратны*. Согласно аксиоме (У4) обратный элемент

$a^{-1}$ существует для каждого $a \neq 0$. Если $a$ и $b \in \mathsf{R}$, причем $b \neq 0$, то произведение $a \cdot b^{-1}$ обычно записывают в виде $\frac{a}{b}$ или $a : b$ и называют *дробью* или *частным* от деления элемента $a$ на элемент $b \in \mathsf{R}$. Операция, сопоставляющая каждой паре элементов $a, b \in \mathsf{R}$, где $b \neq 0$, дробь $\frac{a}{b}$, называется *делением*.

В силу ассоциативности сложения в выражениях $a + (b + c)$ и $(a + b) + c$ скобки можно опустить: любой вариант расстановки скобок в сумме $a + b + c$ дает в качестве результата один и тот же элемент поля $\mathsf{R}$. Точно также в сумме $a + b + c + d$ допускается любой вариант расстановки скобок: элементы

$$\big((a+b)+c\big)+d,\ \big(a+(b+c)\big)+d,\ (a+b)+(c+d),\ \ldots$$

попарно совпадают. Вообще, в каждой сумме, содержащей конечное количество слагаемых из поля $\mathsf{R}$ возможна любая расстановка скобок: результат от этого не зависит.

В произведении конечного количества элементов поля $\mathsf{R}$ скобки также можно расставлять как угодно.

*Условия единственности в аксиомах* (С3), (С4), (У3), (У4) *можно опустить*. Эти условия выполняются автоматически:

Допустим, например, что есть два нуля $0_1 \in \mathsf{R}$ и $0_2 \in \mathsf{R}$, т.е. $a = a + 0_1 = 0_1 + a$ и $a = a + 0_2 = 0_2 + a$ для $\forall a \in \mathsf{R}$. Применяя эти равенства при $a = 0_2$ и соотв. при $a = 0_1$, получим $0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$.

Допустим, далее, что элементы $z_1, z_2 \in \mathsf{R}$ противоположны элементу $a \in \mathsf{R}$, т.е. $a + z_1 = z_1 + a = 0$ и $a + z_2 = z_2 + a = 0$. Тогда

$$z_1 = z_1 + 0 = z_1 + (a + z_2) = (z_1 + a) + z_2 = 0 + z_2 = z_2.$$

Единственность единицы и обратных элементов доказывается аналогично.

Отметим другие простые следствия аксиом поля.

1.2. Свойства операции сложения. *Пусть* $a,b,c,d \in \mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Справедливо равенство* $a-a=0$.

(б) *Справедливо равенство* $-0=0$.

(в) *Справедливо равенство* $-(-a)=a$.

(г) *Если* $a \neq 0$, *то* $-a \neq 0$.

(д) *Равенство* $a+c=b+c$ *равносильно равенству* $a=b$.

(е) *Равенство* $a+c=b$ *равносильно равенству* $a=b-c$.

(ж) *Справедливы равенства* $-(a+b)=-a-b$ *и* $-(a-b)=b-a$.

(з) *Равенство* $a+c=b+d$ *равносильно равенству* $a-d=b-c$.

Доказательства. (а) По определению разности и противоположного элемента имеем $a-a=a+(-a)=0$.

(б) По определению противоположного элемента $(-0)+0=0$. По определению нуля $(-0)+0=-0$. Отсюда $-0=(-0)+0=0$.

(в) Из равенства $a+b=b+a=0$ следует, что не только $b=-a$, но и $a=-b$. Поэтому $a=-b=-(-a)$.

(г) Допустим, что $-a=0$. Тогда $0=a+(-a)=a+0=a$ вопреки условию $a \neq 0$.

(д) Если $a=b$, то очевидно $a+c=b+c$. Если же $a+c=b+c$, то

$$a=a+0=a+c+(-c)=b+c+(-c)=b+0=b.$$

(е) Если $a+c=b$, то $a=a+0=a+c+(-c)=b+(-c)=b-c$. Обратно, если $a=b-c$, то $a+c=(b-c)+c=b+(-c)+c=b$.

(ж) Элемент $-a-b$ совпадает с суммой $(-a)+(-b)$. Поскольку

$$(a+b)+((-a)+(-b))=(a+(-a))+(b+(-b))=0+0=0,$$

то $-a-b=(-a)+(-b)=-(a+b)$. Заменяя здесь $b$ на $-b$, получим и второе равенство $-a+b=-(a-b)$.

(з) Если $a+c=b+d$, то $a-d=a+c-c-d=b+d-c-d=b-c$. Если $a-d=b-c$, то $a+c=a-d+d+c=b-c+d+c=b+d$. ◊

1.3. Свойства операции умножения. *Пусть* $a,b,c,d \in \mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Справедливо равенство* $1^{-1} = 1$.

(б) *Если* $a \neq 0$, *то* $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(в) *Если* $a \neq 0$ *и* $a \neq 1$, *то* $a^{-1} \neq 1$.

(г) *Если* $c \neq 0$ *и* $ac = bc$, *то* $a = b$.

(д) *Если* $c \neq 0$, *то* $(ac = b) \Leftrightarrow \left(a = \frac{b}{c}\right)$.

(е) *Если* $a \neq 0$ *и* $b \neq 0$, *то* $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$.

(ж) *Если* $c \neq 0$ *и* $d \neq 0$, *то* $(ac = bd) \Leftrightarrow \left(ad^{-1} = bc^{-1}\right)$.

Доказательства. (а) По определению обратного элемента $1^{-1} \cdot 1 = 1$. По определению единицы $1^{-1} \cdot 1 = 1^{-1}$. Поэтому $1^{-1} = 1^{-1} \cdot 1 = 1$.

(б) По определению обратного элемента из $ab = ba = 1$ следует, что не только $b = a^{-1}$, но и $a = b^{-1}$. Поэтому $a = b^{-1} = (a^{-1})^{-1}$.

(в) Предполагая $a^{-1} = 1$, получим $1 = aa^{-1} = a1 = a$. Это противоречит условию $a \neq 1$.

(г) Если $ac = bc$ и $c \neq 0$, то $a = a1 = acc^{-1} = bcc^{-1} = b1 = b$.

(д) Если $c \neq 0$ и $ac = b$, то $a = a1 = acc^{-1} = bc^{-1} = \frac{b}{c}$. Обратно, если $a = \frac{b}{c}$, то $ac = \frac{b}{c}c = bc^{-1}c = b1 = b$.

(е) Поскольку $(ab) \cdot \left(a^{-1}b^{-1}\right) = \left(aa^{-1}\right) \cdot \left(bb^{-1}\right) = 1 \cdot 1 = 1$, то элементы $ab$ и $a^{-1}b^{-1}$ взаимно обратны. Поэтому $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$.

(ж) Пусть $c \neq 0$ и $d \neq 0$. Если $ac = bd$, то

$$ad^{-1} = acc^{-1}d^{-1} = bdc^{-1}d^{-1} = bdd^{-1}c^{-1} = bc^{-1}.$$

Обратно, если $ad^{-1} = bc^{-1}$, то $ac = ad^{-1}dc = bc^{-1}dc = bc^{-1}cd = bd$.
◊

1.4. Следствия аксиомы дистрибутивности (У5). *Пусть* $a,b,c \in \mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Справедливо равенство* $0a = a0 = 0$.

(б) *Элемент* $0^{-1}$ *не существует* (*на* $0$ *делить нельзя*).

(в) *Если* $ab = 0$, *то* $a = 0$ *или* $b = 0$.

(г) *Если* $a \neq 0$, *то* $a^{-1} \neq 0$.

(д) *Справедливо равенство* $-a = (-1)a$.

(е) *Справедливы равенства*

$$-ab = (-a)b = a(-b), \ \ ab = (-a)(-b).$$

(ж) *Если* $a \neq 0$, *то* $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

(з) *Справедливо равенство* $(-1)^{-1} = -1^{-1} = -1$.

(и) *Справедливы равенства*

$$a(b+c) = ab + ac, \ \ (a+b)c = ac + bc,$$

$$a(b-c) = ab - ac, \ \ (a-b)c = ac - bc,$$

которые обычно записывают коротко в виде

$$a(b \pm c) = ab \pm ac, \ \ (a \pm b)c = ac \pm bc.$$

Доказательства. (а) По определению единицы $1$ и нуля $0$ и по аксиоме (У5) $a + a0 = a1 + a0 = a(1+0) = a1 = a$. Применяя аксиому (У1) и свойства 1.2(е) и 1.2(а), отсюда получим $0a = a0 = a - a = 0$.

(б) Пусть $0^{-1}$ существует. Тогда $0 = 0 \cdot 0^{-1} = 1$ по свойству (а) и по определению обратного элемента. Но $1 \neq 0$ по аксиоме (У3).

(в) Пусть $ab = 0$. Допустим, что $a \neq 0$. Применяя свойства 1.3(д) и (а), получим $b = \dfrac{0}{a} = 0a^{-1} = 0$.

(г) Пусть $a \neq 0$ и $a^{-1} = 0$. Тогда $aa^{-1} = 1$ по определению элемента $a^{-1}$ и $aa^{-1} = 0$ по свойству (а). Но $1 \neq 0$ по аксиоме (У3).

(д) По аксиоме (У5) и свойству (а)

$$a + (-1)a = a1 + a(-1) \ = \ a(1 + (-1)) = a0 = 0.$$

Следовательно, $-a = (-1)a$.

(е) Очевидно $(-1)(ab)=((-1)a)b=a((-1)b)$. Отсюда по свойству (д) имеем $-ab=(-a)b=a(-b)$. Применяя еще свойство 1.2(в), получим также $ab=-(-ab)=-\big((-a)b\big)=(-a)(-b)$.

(ж) Пусть $a\neq 0$. Тогда элемент $a^{-1}$ существует по аксиоме (У4). По свойству (е) $(-a)\left(-a^{-1}\right)=aa^{-1}=1$. Значит, элементы $-a$ и $-a^{-1}$ взаимно обратны, т.е. справедливо равенство $-a^{-1}=(-a)^{-1}$.

(з) Применяя свойства (ж) и 1.3.(а), получим $(-1)^{-1}=-1^{-1}=-1$.

(и) Равенство $a(b+c)=ab+ac$ выполняется по аксиоме (У5). Используя свойство (е), получим также

$$a(b-c)=a\big(b+(-c)\big)=ab+a(-c)=ab+(-ac)=ab-ac.$$

Равенство $(a\pm b)c=ac\pm bc$ вытекает теперь из аксиомы (У1). ◊

1.5. Свойства операции деления. *Пусть* $a,b,c,d\in\mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Если* $a\neq 0$, *то* $\dfrac{1}{a}=a^{-1}$, $\dfrac{a}{a}=1$, $\dfrac{0}{a}=0$ *и* $\dfrac{b}{1}=b$.

(б) *Если* $a\neq 0$ *и* $b\neq 0$, *то* $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{ab}$.

(в) *Если* $b\neq 0$ *и* $d\neq 0$, *то* $\left(\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\right)\Leftrightarrow(ad=bc)$.

(г) *Если* $b\neq 0$, *то* $(a=bc)\Leftrightarrow\left(c=\dfrac{a}{b}\right)$.

(д) *Если* $b\neq 0$ *и* $c\neq 0$, *то* $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$.

(е) *Если* $a\neq 0$ *и* $b\neq 0$, *то* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\dfrac{b}{a}$.

(ж) *Если* $b\neq 0$, *то* $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$.

(з) *Если* $b\neq 0$, *то* $\dfrac{a}{b}c=c\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{b}$. *В частности,* $\dfrac{a}{b}b=\dfrac{ab}{b}=a$.

(и) *Если* $b\neq 0$ *и* $d\neq 0$, *то* $\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad\pm bc}{bd}$ *и* $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$.

(к) *Если* $b\neq 0$, $c\neq 0$ *и* $d\neq 0$, *то* $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$.

Доказательства. (а) Это следует из определений дроби, единицы и обратного элемента и из свойств 1.4(а) и 1.3(а).

(б) $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=a^{-1}b^{-1}=(ab)^{-1}=\frac{1}{ab}$ по свойствам (а) и 1.3(е).

(в) Это следует из свойства 1.3(ж).

(г) По свойству (а) равносильны равенства $c=\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{1}=\frac{a}{b}$. По свойству (в) последнее равенство равносильно равенству $cb=1\cdot a$, т.е. равенству $a=bc$.

(д) Применяя свойство 1.3(е), получим

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}=acc^{-1}b^{-1}=(ac)\left(b^{-1}c^{-1}\right)=(ac)(bc)^{-1}=\frac{ac}{bc}.$$

(е) Поскольку $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=ab^{-1}ba^{-1}=aa^{-1}=1$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

(ж) По определению дроби и свойству 1.4(ж)

$$-\frac{a}{b}=-ab^{-1},\quad \frac{-a}{b}=(-a)b^{-1},\quad \frac{a}{-b}=a(-b)^{-1}=a\left(-b^{-1}\right).$$

По свойству 1.4(е) правые части этих равенств совпадают. Следовательно, совпадают и левые части.

(з) В самом деле, $c\frac{a}{b}=\frac{a}{b}c=ab^{-1}c=acb^{-1}=\frac{ac}{b}$. Если здесь $c=b$, то $\frac{a}{b}b=\frac{ab}{b}=abb^{-1}=a$.

(и) Применяя свойства (д) и 1.4(и), получим

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=ad(bd)^{-1}\pm bc(bd)^{-1}=$$
$$=(ad\pm bc)(bd)^{-1}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

Второе равенство вытекает из свойства 1.3(е):

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=ab^{-1}cd^{-1}=acb^{-1}d^{-1}=ac(bd)^{-1}=\frac{ac}{bd}.$$

(к) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ по свойствам (е) и (и). ◊

1.6. Замечание. Из перечисленных свойств операций сложения и умножения легко вывести *формулы сокращенного умножения*

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,\ (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right),$$

где $a^2=aa,\ \ a^3=a^2a,\ \ 2=1+1\in\mathsf{R},\ \ 3=2+1\in\mathsf{R},\ \ldots$, и другие известные соотношения элементарной алгебры.

1.7. Примеры полей:

(а) Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения, является полем.

(б) Пусть $\mathsf{R}$ – некоторое поле. Обозначим через $\mathsf{Z}$ наименьшее из подмножеств $A\subset\mathsf{R}$, удовлетворяющих двум условиям

(*) $1\in A$, (**) если $a\in A$, то $a-1\in A$ и $a+1\in A$.

Тогда множество $\mathsf{Q}=\left\{\dfrac{n}{m};\ n\in\mathsf{Z},\ m\in\mathsf{Z}\setminus\{0\}\right\}$ является полем.

(в) Пусть $n\in\mathbb{N}$ – простое число и $\mathsf{R}_n=\{0,1,\ldots,n-1\}\subset\mathbb{Z}$. Для любых $p,q\in\mathsf{R}_n$ обозначим через $p\oplus q$ и соотв. через $p\odot q$ остатки от деления чисел $p+q$ и $pq$ на $n$. Нетрудно доказать, что множество $\mathsf{R}_n$ с такими операциями является полем.

(г) Если $\mathsf{R}$ – поле, то множество $\mathsf{R}$ всех функций вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены переменного $x\in\mathsf{R}$ с коэффициентами из $\mathsf{R}$, также является полем.

1.8. Задачи. (а) Пусть $\mathsf{R}$ – поле. Обозначим $2=1+1,\ \ 3=2+1,$ $4=3+1,\ \ 5=4+1$ и $6=5+1.$ Доказать, что справедливы равенства

$$4=2+2=2\cdot 2,\ \ 5=3+2,\ \ 6=2+2+2=3+3=3\cdot 2.$$

(б) Пусть задано поле $\mathsf{R}$. Рассмотрим множество $\mathsf{K}$ всевозможных упорядоченных пар $(r,s)$, где $r,\ s\in\mathsf{R}$. Каждую пару $(r,s)$

будем записывать в виде $r+s\sqrt{2}$. Введем во множестве $\mathsf{K}$ операции сложения и умножения по правилам

$$(r+s\sqrt{2})+(r'+s'\sqrt{2})=(r+r')+(s+s')\sqrt{2},$$

$$(r+s\sqrt{2})\cdot(r'+s'\sqrt{2})=(rr'+2ss')+(rs'+r's)\sqrt{2}.$$

Доказать, что множество $\mathsf{K}$ с этими операциями является полем.

(в) Пусть $\mathsf{R}$ – поле, $a,b,c\in\mathsf{R}$, $a\neq 0$ и корень $\sqrt{b^2-4ac}\in\mathsf{R}$ существует. Доказать, что корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ можно вычислять по формулам $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

## §2. Аксиомы порядка

2.1. Определение. Поле $\mathsf{R}$ называется *упорядоченным*, если в нем введено *отношение порядка*, т.е. для всех $a$ и $b\in\mathsf{R}$ указано, верно или неверно отношение $a\leqslant b$, причем так, что выполнены следующие условия (П1)÷(П6) (*аксиомы порядка*):

(П1) *Если* $a\in\mathsf{R}$, *то* $a\leqslant a$.

(П2) *Если* $a,b,c\in\mathsf{R}$, $a\leqslant b$ *и* $b\leqslant c$, *то* $a\leqslant c$.

(П3) *Если* $a,b\in\mathsf{R}$, $a\leqslant b$ *и* $b\leqslant a$, *то* $a=b$.

(П4) *Если* $a,b\in\mathsf{R}$, *то* $a\leqslant b$ *или* $b\leqslant a$.

(П5) *Если* $a,b,c\in\mathsf{R}$ *и* $a\leqslant b$, *то* $a+c\leqslant b+c$.

(П6) *Если* $a,b,c\in\mathsf{R}$, $a\leqslant b$ *и* $0\leqslant c$, *то* $ac\leqslant bc$.

Вместо $a\leqslant b$ пишут также $b\geqslant a$. Если $a\leqslant b$ и $a\neq b$, то пишут $a<b$ или $b>a$. Соотношения $a\leqslant b$, $b\geqslant a$, $a<b$ и $b>a$ именуются *неравенствами*. Неравенства $a<b$ и $b>a$ называются *строгими*. Элемент $a\in\mathsf{R}$ называется *положительным*, если $a>0$, и *отрицательным*, если $a<0$.

Множество $\mathsf{R}$, в котором введено отношение $\leqslant$ так, что выполнены условия (П1)÷(П3), называется *частично упорядоченным*. Если выполнено еще условие (П4), то множество $\mathsf{R}$ называется *линейно упорядоченным*. Таким образом, *упорядоченным полем* называется поле, в котором введено отношение *линейного порядка*, причем так, что выполнены еще условия (П5) и (П6), связывающие отношение порядка с алгебраическими операциями поля.

Отметим простейшие следствия аксиом упорядоченного поля.

2.2. Свойства отношения линейного порядка. *Пусть* $a,b,c\in\mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Справедливо одно и только одно из трех соотношений*

$$a=b,\ \ a<b,\ \ a>b.$$

(б) *Если* $a<b\leqslant c$ *или* $a\leqslant b<c$, *то* $a<c$.

Доказательства. (а) Пусть $a$ и $b\in\mathrm{R}$. Тогда $a\leqslant b$ или $a\geqslant b$ по аксиоме (П4). Если $a\leqslant b,$ то $a=b$ или $a<b.$ Если же $b\leqslant a,$ то $b=a$ или $b<a.$. Значит, одно из соотношений $a=b,$ $a<b,$ $a>b$ выполнено. Если $a=b,$ то соотношения $a<b$ и $a>b$ невозможны по определению строгих неравенств. Одновременное выполнение соотношений $a<b$ и $a>b$ также невозможно, ибо в этом случае мы получили бы $a\leqslant b\leqslant a,$ откуда $a=b$ по аксиоме (П3), а это противоречит каждому из неравенств $a<b$ и $a>b.$

(б) Пусть $a\leqslant b$ и $b\leqslant c,$ причем одно из этих неравенств является строгим. По аксиоме (П2) $a\leqslant c.$ Допустим, что $a=c.$ Тогда из $a\leqslant b$ получим $c\leqslant a.$ Из $b\leqslant c$ и $c\leqslant a$ следует $b\leqslant a.$ Отсюда и из $a\leqslant b$ вытекает $a=b.$ Из $a=c$ и $a=b$ следует, что $b=c.$ Равенства $a=b$ и $b=c$ противоречат тому, что одно из неравенств $a\leqslant b$ и $b\leqslant c$ является строгим. Таким образом, $a\neq c$ и, значит, $a<c.$ ◊

2.3. Отношение порядка и сложение. *Пусть* $a,b,c\in\mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Если* $a<b$, *то* $a\pm c<b\pm c$.

(б) *Равносильны неравенства* $a>b,$ $a-b>0$ *и* $-a<-b$.

(в) $(a>0)\Leftrightarrow(-a<0)$ *и* $(a<0)\Leftrightarrow(-a>0)$.

(г) *Равносильны неравенства* $a<b-c$ *и* $a+c<b$.

(д) *Равносильны неравенства* $a<b+c$ *и* $a-c<b$.

Доказательства. (а) Если $a<b,$ то $a\leqslant b$ и $a\pm c\leqslant b\pm c$ по аксиоме (П5). Предполагая $a+c=b+c,$ получим $a=a+c-c=b+c-c=b$ вопреки условию $a<b.$ Значит, $a+c\neq b+c,$ т.е. $a+c<b+c.$

Неравенство $a-c<b-c$ доказывается аналогично.

(б) Если $a > b$, то $a - b > b - b = 0$ по свойству (а) (и 1.2(а)). Если $a - b > 0$, то $-b = a - b - a > 0 - a = -a$ по свойству (а). Если $-a < -b$, то $a = -b + a + b > -a + a + b = b$ также по свойству (а). Поэтому неравенства $a > b$, $a - b > 0$ и $-a < -b$ равносильны.

(в) По предыдущему свойству (б) и по свойству 1.2(б) имеем
$$(a > 0) \Leftrightarrow (-a < -0) \Leftrightarrow (-a < 0).$$
Аналогично $(a < 0) \Leftrightarrow (-a > -0) \Leftrightarrow (-a > 0)$.

(г), (д) Эти свойства также легко вытекают из свойства (а).

2.4. Отношение порядка и умножение. *Пусть* $a, b, c \in \mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Если* $a < b$, $c > 0$, *то* $ac < bc$.

(б) *Если* $a < b$, $c < 0$, *то* $ac > bc$.

(в) *Если* $a > 0$ *и* $b > 0$ *или* $a < 0$ *и* $b < 0$, *то* $ab > 0$.

(г) *Если* $a > 0$ *и* $b < 0$ *или* $a < 0$ *и* $b > 0$, *то* $ab < 0$.

(д) *Справедливо неравенство* $-1 < 0 < 1$.

(е) *Если* $a > 0$, *то* $a^{-1} > 0$. *Если* $a < 0$, *то* $a^{-1} < 0$.

(ж) *Если* $b > a > 0$, *то* $a^{-1} > b^{-1} > 0$.

(з) *Если* $b < a < 0$, *то* $a^{-1} < b^{-1} < 0$.

Доказательства. (а) Пусть $a < b$ и $c > 0$. Тогда $ac \leqslant bc$ по аксиоме (П6). Предполагая, что $ac = bc$, получим $a = acc^{-1} = bcc^{-1} = b$ вопреки условию $a < b$. Стало быть, $ac \neq bc$ и поэтому $ac < bc$.

(б) Если $a < b$ и $c < 0$, то $-c > 0$, $a(-c) < b(-c)$, $-ac < -bc$ и, значит, $ac < bc$ (свойства 2.3(в), (а), 1.4(е) и 2.3(б)).

(в) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$ по свойству (а). Если $a < 0$ и $b < 0$, то $ab > 0$ по свойству (б).

(г) Пусть $a > 0$ и $b < 0$. Применяя свойства (а) и 1.4(а), получим $ab < a0 = 0$. Если $a < 0$ и $b > 0$, то аналогично $ab < 0b = 0$.

(д) По аксиоме (П4) $0 \leqslant 1$ или $1 \leqslant 0$. Поскольку $0 \neq 1$, то $0 < 1$ или $1 < 0$. Надо доказать, что $0 < 1$. Допустим, что $1 < 0$. Тогда по свойству (б) для $a=1<b=0$ и $c=1<0$, получим $ac>bc$, т.е. $1=1\cdot 1>0\cdot 1=0$. Это противоречит предположению, что $1<0$. Значит, все-таки $0<1$. По свойству 2.3(в) из $0<1$ вытекает $-1<0$.

(е) Пусть $a>0$. Допустим, что неравенство $a^{-1}>0$ не верно. Тогда $a^{-1}\leqslant 0$ по свойству 2.2(а). Отсюда $1=a^{-1}a\leqslant 0a=0$ по аксиоме (П6) и по свойству 1.4(а)). Это противоречит свойству (д).

Пусть $a<0$. Допустим, что $a^{-1}\geqslant 0$. Тогда $1=a^{-1}a\leqslant a0=0$ (свойства (б) и 1.4(а)) вопреки свойству (д).

(ж) Пусть $b>a>0$. Тогда $b^{-1}>0$ и $a^{-1}>0$ по свойству (е). Следовательно, $a^{-1}=ba^{-1}b^{-1}>aa^{-1}b^{-1}=b^{-1}$ по свойству (а).

(з) Пусть $b<a<0$. Тогда $b^{-1}<0$, $a^{-1}<0$, $a^{-1}b^{-1}>0$ и $a^{-1}=ba^{-1}b^{-1}<aa^{-1}b^{-1}=b^{-1}$ (свойства (е), (в) и (б)).

2.5. Отношение порядка и деление. *Пусть* $a,b,c,d\in\mathrm{R}$. *Тогда*:

(а) *Если* $a<b$ *и* $c>0$, *то* $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

(б) *Если* $a<b$ *и* $c<0$, *то* $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

(в) *Если* $a>0$ *и* $b>0$ *или* $a<0$ *и* $b<0$, *то* $\frac{a}{b}>0$.

(г) *Если* $a>0$ *и* $b<0$ *или* $a<0$ *и* $b>0$, *то* $\frac{a}{b}<0$.

(д) *Если* $a>0$ *и* $b>0$, *то* $(a>b)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\right)$.

(е) *Если* $b>0$, *то* $(a<bc)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}<c\right)$.

(ж) *Если* $a>0$, *то* $(ab>1)\Leftrightarrow\left(b>\frac{1}{a}\right)$.

(з) *Если* $a>0$, $b>0$ *и* $d>0$. *Если* $b>d$, *то* $\frac{a}{b}<\frac{a}{d}$.

(и) *Если* $0<a<c$ *и* $0<b<d$, *то* $\frac{a}{d}<\frac{c}{b}$.

(к) *Если* $0 < a < b$, *то* $0 < \frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}$.

(л) *Пусть* $a > 0$ *и* $b > 0$. *Тогда* $(a < b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} < 1\right) \Leftrightarrow \left(1 < \frac{b}{a}\right)$.

(м) *Если* $a > 1$, *то* $0 < \frac{1}{a} < 1$, *если* $0 < a < 1$, *то* $\frac{1}{a} > 1$.

(н) *Если* $a < -1$, *то* $-1 < \frac{1}{a} < 0$, *если* $-1 < a < 0$, *то* $\frac{1}{a} < -1$.

Доказательства. (а) Пусть $a < b$ и $c > 0$. Тогда $c^{-1} > 0$ по свойству 2.4(е) и $\frac{a}{c} = ac^{-1} < bc^{-1} = \frac{b}{c}$ по свойству 2.4(а).

(б) Это следует из свойств 2.4(е) и 2.4(б).

(в) Это следует из свойств 2.4(е) и 2.4(в).

(г) Это следует из свойств 2.4(е) и 2.4(г).

(д) Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Если $a > b$, то $\frac{1}{a} = a^{-1} < b^{-1} = \frac{1}{b}$ по свойству 2.4(ж). Обратно, если $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, то по свойству 2.4(а)

$$b = baa^{-1} = ab\frac{1}{a} < ab\frac{1}{b} = abb^{-1} = a.$$

(е) Пусть $b > 0$. Тогда $b^{-1} > 0$ по свойству 2.4(е). Если $a < bc$, то $\frac{a}{b} = ab^{-1} < bcb^{-1} = c$ по свойству 2.4(а). Если $\frac{a}{b} < c$, то $a = ab^{-1}b = \ = b\frac{a}{b} < bc$ также по свойству 2.4(а).

(ж) Это частный случай свойства (е).

(з) Пусть $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$ и $b > d$. Тогда $b^{-1} < d^{-1}$ по свойству 2.4(ж) и $\frac{a}{b} = ab^{-1} < ad^{-1} = \frac{a}{d}$ по свойству 2.4(а).

(и) Пусть $0 < a < c$ и $0 < b < d$. Тогда $\frac{a}{d} \leqslant \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} \leqslant \frac{c}{b}$ по свойствам (а) и (з) соотв.

(к) Пусть $0<a<b$. Тогда $0<b^{-1}<a^{-1}$ по свойству 2.4(ж). Применяя еще свойства 1.4(а) и 2.4(а), получим $0=a0<ab^{-1}<aa^{-1}=1= =bb^{-1}<ba^{-1}$, т.е. $0<\frac{a}{b}<1<\frac{b}{a}$.

(л) Пусть $a>0$ и $b>0$. Если $a<b$, то $\frac{a}{b}<1$ и $1<\frac{b}{a}$ по свойству (к). Если $\frac{a}{b}<1$, то $a=\frac{a}{b}b<1\cdot b=b$; если $1<\frac{b}{a}$, то также $a=a\cdot 1<a\frac{b}{a}=b$ (свойства 1.5(з) и 2.4(а)). Равносильность неравенств $a<b$, $\frac{a}{b}<1$ и $1<\frac{b}{a}$ доказана.

(м) Если $a>1$, то $0<a^{-1}<1^{-1}$, т.е. $0<\frac{1}{a}<1$ (свойства 2.4(ж), 1.5(а) и 1.3(а)). Если $0<a<1$, то аналогично $1^{-1}<a^{-1}$, т.е. $1<\frac{1}{a}$.

(н) Если $a<-1$, то $(-1)^{-1}<a^{-1}<0$, т.е. $-1<\frac{1}{a}<0$ (свойства 2.4(з), 1.5(а) и 1.3(а)). Если $-1<a<0$, то аналогично $a^{-1}<(-1)^{-1}$, т.е. $1<\frac{1}{a}$. ◊

2.6. Определение. Элемент $s\in \mathsf{R}$ называют *наибольшим элементом* множества $A\subset \mathsf{R}$ или его *максимумом* и пишут $s=\max A$, если $s\in A$ и $a\leqslant s$ для всех $a\in A$. Элемент $t\in\mathbb{R}$ называют *наименьшим элементом* множества $A$ или его *минимумом* и пишут $t=\min A$, если $t\in A$ и $t\leqslant a$ для каждого $a\in A$.

*Модуль* или *абсолютная величина* $|a|\in \mathsf{R}$ элемента $a\in \mathsf{R}$ определяется равенством

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0,\\ -a, \text{ если } a\leqslant 0.\end{cases}$$

В случае $a=0$ оба варианта дают один и тот же результат: $|a|=0$.

2.7. Свойства модуля. *Пусть* $a,b\in \mathsf{R}$. *Тогда*:

(а) $|a|=\max\{a,-a\}\geqslant 0$, $a\leqslant|a|$, $-a\leqslant|a|$.

(б) $|a|=0$ *тогда и только тогда, когда* $a=0$.

(в) *Справедливы равенство* $|-a|=|a|$ *и* $|ab|=|a|\cdot|b|$.

(г) *Если* $b\neq 0$, *то* $\left|b^{-1}\right|=|b|^{-1}$ *и* $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

(д) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (*неравенство треугольника*).

(е) $|(|a|-|b|)|\leqslant|a-b|$ (*второе неравенство треугольника*).

(ж) *Пусть* $\varepsilon\in\mathrm{R}$ *и* $\varepsilon>0$. *Тогда* $(|a|<\varepsilon)\Leftrightarrow(-\varepsilon<a<\varepsilon)$.

Доказательства. (а) Пусть $a\geqslant 0$. Тогда $|a|=a\geqslant 0$ и $-a\leqslant 0$ по свойству 2.3(в). Отсюда $-a\leqslant a$ и $\max\{a,-a\}=a=|a|$. Если же $a\leqslant 0$, то $|a|=-a$, $-a\geqslant 0\geqslant a$ и $\max\{a,-a\}=-a=|a|\geqslant 0$.

Неравенства $a\leqslant|a|$ и $-a\leqslant|a|$ вытекают из первого равенства.

(б) Если $a=0$, то $-a=0$ по свойству 1.2(б) и $|a|=0$. Если $a\neq 0$, то $-a\neq 0$ по свойству 2.3(в), откуда $|a|\neq 0$.

(в) Если $a\geqslant 0$, то $-a\leqslant 0$ по свойству 2.3(в) и $|-a|=-(-a)=$ $=a=|a|$ по определению модуля и по свойству 1.2(в). Если $a\leqslant 0$, то $-a\geqslant 0$ и по определению модуля $|a|=-a=|-a|$.

Если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, то $ab\geqslant 0$ по свойству 2.4(в). Значит, в данном случае $|ab|=ab=|a|\cdot|b|$. Если $a\leqslant 0$ и $b\leqslant 0$, то $ab\geqslant 0$ по свойству 2.4(в) и $|ab|=ab=(-a)(-b)=|a|\cdot|b|$ по определению модуля и по свойству 1.4(е).

Если $a\geqslant 0$ и $b\leqslant 0$, то $ab\leqslant 0$ по свойству 2.4(г) и $|ab|=-ab=$ $=a(-b)=|a|\cdot|b|$ по определению модуля и по свойству 1.4(е). Если $a\leqslant 0$ и $b\geqslant 0$, то аналогично $|ab|=-ab=(-a)b=|a|\cdot|b|$.

Таким образом, всегда $|ab|=|a|\cdot|b|$.

(г) Пусть $b\neq 0$. Если $b>0$, то $|b|=b$, $b^{-1}>0$ по свойству 2.4(е) и $\left|b^{-1}\right|=b^{-1}=|b|^{-1}$ по определению модуля. Если $b<0$, то $|b|=-b$, $b^{-1}<0$ по свойству 2.4(е) и $\left|b^{-1}\right|=-b^{-1}=(-b)^{-1}=|b|^{-1}$ по определению модуля и по свойству 1.4(ж). Равенство $\left|b^{-1}\right|=|b|^{-1}$ доказано. Отсюда по свойству (в)

$$\left|\frac{a}{b}\right| = |ab^{-1}| = |a|\cdot|b^{-1}| = |a|\cdot|b|^{-1} = \frac{|a|}{|b|}.$$

(д) По свойствам (а) и 2.3(а) $a+b \leqslant |a|+|b|$ и $-(a+b) = -a-b \leqslant \leqslant |a|+|b|$. Значит, $|a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\} \leqslant |a|+|b|$.

(е) По предыдущему свойству $|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$. Отсюда $|a|-|b| \leqslant |a-b|$ по свойству 2.3(г). Аналогично $|b|-|a| \leqslant |b-a|$. По свойству (в) $|a-b| = |b-a|$. По свойству 1.2(ж) $-(|a|-|b|) = \ = |b|-|a|$. Применяя еще свойство (а), получим

$$|(|a|-|b|)| = \max\{|a|-|b|, |b|-|a|\} \leqslant |a-b|.$$

(ж) Пусть $\varepsilon > 0$. Если $|a| < \varepsilon$, *то* $a < \varepsilon$ и $-a < \varepsilon$ по свойству (а). Из $-a < \varepsilon$ следует $-\varepsilon < a$ по свойству 2.3(б). Поэтому $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

С другой стороны, пусть $-\varepsilon < a < \varepsilon$. Из $-\varepsilon < a$ следует $-a < \varepsilon$. Значит, $|a| = \max\{a, -a\} < \varepsilon$. ◊

2.8. Примеры упорядоченных полей.

(а) Свойства рациональных чисел, известные из школы, показывают, что множество $\mathbb{Q}$, наделенное естественными операциями сложения и умножения и обычным отношением порядка, является упорядоченным полем.

(б) Если $\mathsf{R}$ – упорядоченное поле, то его подполе $\mathsf{Q}$, описанное в примере 1.7(б), является упорядоченным полем.

(в) Пусть $n \in \mathbb{N}$ – простое число и $\mathsf{R}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$ – поле, описанное в примере 1.7(в). Это поле имеет естественное отношение линейного порядка, но *не является упорядоченным полем*. В частности, не выполняется аксиома (П5): Для $a = 0$, $b = 1$, $c = n-1$ верно $a \leqslant b$, но неверно $a \oplus c \leqslant b \oplus c$, ибо $a \oplus c = 0 \oplus (n-1) = \ = n-1$ и $b \oplus c = 1 \oplus (n-1) =$ (остаток от деления $n$ на $n$) $= 0$.

2.9. Задача. Доказать данные свойства упорядоченного поля $\mathsf{R}$:

(а) $\forall x > 1\ \exists y > 1$: $x^3 - 2x < y^3 - y < x^3 - x$;

(b) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^2 + x < y^2 + y < x^2 + x + 1$;

(c) $\forall x > 1\ \exists y > 1:\ x^2 - 2x < y^2 - y < x^2 - x$;

(d) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 - x^2 < y^3 < x^3$;

(e) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 + x < y^3 + y < x^3 + x + 1$;

(f) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 < y^3 < x^3 + 1$;

(g) $\forall x > 1\ \exists y > 1:\ x^2 - x < y^2 - y < x^2 - x + 1$;

(h) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 - 1 < y^3 < x^3$;

(i) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 < y^3 < x^3 + x$;

(j) $\forall x > 1\ \exists y > 1:\ x^3 - x - 1 < y^3 - y < x^3 - x$;

(k) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 + x < y^3 + y < x^3 + 2x$;

(l) $\forall x > 1\ \exists y > 1:\ x^3 - x < y^3 - y < x^3 - x + 1$;

(m) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 + x - 1 < y^3 + y < x^3 + x$;

(n) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 - x < y^3 < x^3$;

(o) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^2 + x < y^2 + y < x^2 + 2x$

(p) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ x^3 < y^3 < x^3 + x^2$.

2.10. Задача. Доказать данные свойства упорядоченного поля $\mathrm{R}$:

(a) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ \dfrac{x^2}{x+1} < \dfrac{y^2}{y+1} < \dfrac{x^2+1}{x+1}$;

(b) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ \dfrac{x^2}{x+2} < \dfrac{y^2}{y+1} < \dfrac{x^2}{x+1}$;

(c) $\forall x > 1\ \exists y > 1:\ \dfrac{x^2+1}{x} < \dfrac{y^2+1}{y} < \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$;

(d) $\forall x > 0\ \exists y > 0:\ \dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{y-1}{y+1} < \dfrac{x}{x+2}$;

(e) $\forall x > 2\ \exists y > 2:\ \dfrac{x^2+x+1}{x} < \dfrac{y^2}{y-1} < \dfrac{x^2}{x-1}$;

(f) $\forall x>1\ \exists y>1:\ \dfrac{x}{x^2+2}<\dfrac{y}{y^2+1}<\dfrac{x}{x^2+1}$;

(g) $\forall x>0\ \exists y>0:\ \dfrac{x^2-1}{x^2}<\dfrac{y^2}{y^2+1}<\dfrac{x^2}{x^2+1}$;

(h) $\forall x>2\ \exists y>2:\ \dfrac{x^2}{x-1}<\dfrac{y^2}{y-1}<\dfrac{x^2+2x+1}{x}$;

(i) $\forall x>1\ \exists y>1:\ \dfrac{x}{x^2+1}<\dfrac{y}{y^2+1}<\dfrac{1}{x}$;

(j) $\forall x>0\ \exists y>0:\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}<\dfrac{y^2-1}{y^2+1}<\dfrac{x^2}{x^2+2}$;

(k) $\forall x>1\ \exists y>1:\ \dfrac{x}{x^2-1}<\dfrac{y}{y^2-1}<\dfrac{1}{x-1}$;

(l) $\forall x>1\ \exists y>1:\ \dfrac{x^2+1}{x^2}<\dfrac{y^2+1}{y^2}<\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

(m) $\forall x>0\ \exists y>0:\ \dfrac{x^2}{x^2+1}<\dfrac{y^2}{y^2+1}<\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$;

(n) $\forall x>1\ \exists y>1:\ \dfrac{1}{x+1}<\dfrac{y}{y^2-1}<\dfrac{x}{x^2-1}$;

(o) $\forall x>0\ \exists y>0:\ \dfrac{x^2+2}{x^2+1}<\dfrac{y^2+1}{y^2}<\dfrac{x^2+1}{x^2}$;

(p) $\forall x>0\ \exists y>0:\ \dfrac{x^3}{x+1}<\dfrac{y^3}{y+1}<x^2-x+1$.

## §3. Аксиома непрерывности

3.1. Определение. Упорядоченное поле $\mathsf{R}$ называется *непрерывным* (или *полным*), если оно подчиняется следующей аксиоме:

Аксиома непрерывности: *Если непустые множества $A\subset\mathsf{R}$ и $B\subset\mathsf{R}$ таковы, что $a\leqslant b$ для всех $a\in A$ и $b\in B$, то существует хотя бы один элемент $\xi\in\mathsf{R}$ такой, что $a\leqslant\xi\leqslant b$ для всех $a\in A$ и $b\in B$.*

Интуитивный смысл свойства непрерывности поля $\mathsf{R}$ заключается в том, что в таком поле нет „щелей“.

3.2. Теорема. *Непрерывное упорядоченное поле существует и единственно.*

Замечание. Здесь *единственность* означает следующее: *Если* $\mathsf{R}$ *и* $\mathsf{R}'$ *– два непрерывных упорядоченных поля, то имеется и только одно взаимно однозначное соответствие* $a \leftrightarrow a'$ *между элементами* $a \in \mathsf{R}$ *и* $a' \in \mathsf{R}'$ *такое, что* $a+b \leftrightarrow a'+b'$, $ab \leftrightarrow a'b'$ *и* $a \leqslant b \Leftrightarrow a' \leqslant b'$ *для любых* $a$ *и* $b \in \mathsf{R}$. *В частности, тогда* $0 \leftrightarrow 0'$ *и* $1 \leftrightarrow 1'$ *т.е. нулю и единице одного поля соответствуют нуль и единица другого поля.*

3.3. Определение. Непрерывное упорядоченное поле $\mathsf{R}$ называется *множеством вещественных чисел* и обозначается $\mathbb{R}$. Элементы $x \in \mathbb{R}$ называются *вещественными* (или *действительными*) *числами*. Нуль и единица поля $\mathbb{R}$ обозначаются $0$ и $1$ соотв.

Свойство множества $\mathbb{R}$, выражаемое аксиомой непрерывности, в явном виде выделил в 1872 г. немецкий математик *Дедекинд*.

3.4. Замечание. Доказательство теоремы 3.2 не входит в программу курса математического анализа. *Идея доказательства существования* непрерывного упорядоченного поля $\mathbb{R}$ заключается в следующем. Сначала *строится* (в рамках аксиоматической теории множеств) множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел. При помощи множества $\mathbb{N}$ *определяются* множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ всех целых и соотв. всех рациональных чисел. В этих множествах естественным способом вводятся арифметические операции и отношение порядка. Множество $\mathbb{Q}$ оказывается тогда упорядоченным полем. Чтобы завершить построение поля $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел, ко множеству $\mathbb{Q}$ добавляют „*идеальные элементы*“, которые „заклеивают все щели“ множества $\mathbb{Q}$. В школьной математике последний шаг предлагается реализовать при помощи *десятичных дробей*. В учебниках для университетов чаще применяются „*сечения Дедекинда*“.

*Сечением поля* $\mathbb{Q}$ называется пара $\{A,B\}$ непустых множеств $A \subset \mathbb{Q}$ и $B \subset \mathbb{Q}$ таких, что $A \cup B = \mathbb{Q}$ и $A \cap B = \varnothing$, причем

$a<b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Каждому $r \in \mathbb{Q}$ соответствуют два сечения $\{A_r, B_r\}$ и $\{A_r', B_r'\}$, где

$$A_r = \{x \in \mathbb{Q};\, x \leqslant r\},\ \ B_r = \{y \in \mathbb{Q};\, y > r\},$$
$$A_r' = \{x \in \mathbb{Q};\, x < r\},\ \ B_r' = \{y \in \mathbb{Q};\, y \geqslant r\}.$$

Говорят, что данные сечения *производятся числом* $r$. Некоторые сечения не производятся никакими числами $r \in \mathbb{Q}$. Таково, например, сечение $\{A', B'\}$, где $B' = \{y \in \mathbb{Q};\, y > 0, y^2 > 2\}$ и $A' = \mathbb{Q} \setminus B'$. Такие сечения объявляются *иррациональными числами*. Можно также считать, что ко множеству $\mathbb{Q}$ добавляются „идеальные элементы“, которые как раз и порождают подобные сечения.

Приведем пример применения аксиомы непрерывности.

3.5. Пример. *Существует число* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Точнее, *существует и единственно число* $\xi \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\xi > 0$ *и* $\xi^2 = 2$.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$A = \{x > 0;\, x^2 < 2\} \text{ и } B = \{x > 0;\, x^2 > 2\}.$$

Очевидно $1 \in A$ и $2 \in B$. Далее, если $x \in A$ и $y \in B$, то $x \leqslant y$. (Допуская $y < x$, получим противоречие: $2 < y^2 < xy < x^2 < 2$ ). По аксиоме непрерывности существует число $\xi \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant \xi \leqslant y$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. В частности, $1 \leqslant \xi \leqslant 2$.

Докажем, что $\xi^2 = 2$. Обозначим $\theta = 2 - \xi^2$ и $z = \xi + \dfrac{\theta}{5}$.

Если $\xi^2 < 2$, то $\theta > 0$, $z > \xi \geqslant 1 > 0$, $\theta = 2 - \xi^2 \leqslant 2 - 1^2 = 1$ и

$$z^2 = \xi^2 + \frac{\theta}{5}\left(2\xi + \frac{\theta}{5}\right) < \xi^2 + \frac{\theta}{5}\left(4 + \frac{1}{5}\right) < \xi^2 + \theta = 2,$$

откуда $z \in A$ вопреки неравенству $z > \xi$.

Пусть $\xi^2 > 2$. Тогда $\theta < 0$, $z < \xi$, $2\xi + \dfrac{\theta}{5} < 2\xi \leqslant 4 < 5$ и

$$z^2 = \xi^2 + \frac{\theta}{5}\left(2\xi + \frac{\theta}{5}\right) > \xi^2 + \frac{\theta}{5} \cdot 5 = \xi^2 + \theta = 2.$$

Отсюда и из оценки

$$z=\xi+\frac{\theta}{5}\geqslant 1+\frac{1}{5}\left(2-\xi^2\right)\geqslant 1+\frac{2-4}{5}>0$$

следует, что $z\in B$ вопреки неравенству $z<\xi$.

Таким образом, $\xi^2=2$, т.е. $\sqrt{2}=\xi$. Единственность числа $\sqrt{2}$ очевидна (ибо если $0<\xi<\eta$, то $\xi^2<\xi\eta<\eta^2$). ◊

3.6. Определение. *Сегмент* $[a,b]$, *интервал* $(a,b)$ *и полуинтервалы* $[a,b)$ *и* $(a,b]$ *с концами* $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, определяются равенствами

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R};\ a\leqslant x\leqslant b\},\ (a,b)=\{x\in\mathbb{R};\ a<x<b\},$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R};\ a\leqslant x<b\},\ (a,b]=\{x\in\mathbb{R};\ a<x\leqslant b\}.$$

*Замкнутые полуоси* $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ и *открытые полуоси* $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ определяются равенствами

$$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ x\geqslant a\},\ (-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R};\ x\leqslant b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ x>a\},\ (-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R};\ x<b\}.$$

Сегменты, интервалы, полуинтервалы, полуоси и все множество $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ называются еще *промежутками*.

Множество $\mathbb{R}$ принято изображать прямой с отмеченными на ней точками 0 и 1. Поэтому множество $\mathbb{R}$ называют еще *числовой прямой* или *числовой осью*.

3.7. Замечание. Символы $-\infty$ и $+\infty$, участвующие в обозначениях полуосей, множеству $\mathbb{R}$ *не принадлежат* (и *числами не являются*). Но удобно считать, что $-\infty<x<+\infty$ для каждого $x\in\mathbb{R}$. В частности, тогда равенства, определяющие полуоси, можно сделать более похожими на определения интервалов и полуинтервалов:

$$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ a\leqslant x<+\infty\},\ (-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R};\ -\infty<x\leqslant b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ a<x<+\infty\},\ (-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R};\ -\infty<x<b\}.$$

Поэтому открытые полуоси и всю числовую ось $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ часто также считают интервалами.

## §4. Ограниченные множества. Супремум и инфимум

4.1. Определение. Множество $A\subset\mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором сегменте $[a,b]$.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует $b \in \mathbb{R}$ такое, что $A \subset (-\infty, b]$, т.е. $x \leqslant b$ для каждого $x \in A$. Число $b$ в этом случае называется *верхней гранью* множества $A$.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $A \subset [a, +\infty)$, т.е. $x \geqslant a$ для каждого $x \in A$. Число $a$ в этом случае называется *нижней гранью* множества $A$.

Если $b$ – верхняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$, то все числа $c \geqslant b$ также будут его верхними гранями. Аналогично, множество, ограниченное снизу, имеет много нижних граней.

Ясно, что множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено как сверху, так и снизу.

Если множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу), то его подмножество $B$ также ограничено сверху (соотв. снизу).

4.2. Примеры. (а) Полуоси $[a, +\infty)$ и $(a, +\infty)$ ограничены снизу. Полуоси $(-\infty, b]$ и $(-\infty, b)$ ограничены сверху.

(б) Промежутки $[a, b]$, $(a, b)$, $[a, b)$ и $(a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$, ограничены как снизу, так и сверху.

(в) *Полуось* $[a, +\infty)$ *не ограничена сверху*. Действительно, допустим, что она ограничена сверху числом $z \in \mathbb{R}$. Для числа $y = z + 1$ имеем $a \leqslant z < y$. Поэтому $y \in [a, +\infty)$. Но тогда $y \leqslant z$ по определению $z$. Это противоречит неравенству $z < y$.

Аналогично доказывается, что *полуось* $(-\infty, b]$ *не ограничена снизу*, а вся *числовая прямая* $\mathbb{R}$ *не ограничена ни сверху, ни снизу*.

4.3. Определение. Пусть непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Наименьшая из его верхних граней обозначается $\sup A$ и называется *точной верхней гранью множества* $A$ или его *супремумом*.

4.4. Свойства супремума множества $A \subset \mathbb{R}$, ограниченного сверху.

(а) (Теорема Больцано). *Каждое непустое ограниченное сверху множество* $A \subset \mathbb{R}$ *имеет единственный супремум*.

(б) *Пусть* $s \in \mathbb{R}$ *и непустое множество* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху. Равенство* $s = \sup A$ *справедливо тогда и только тогда, когда выполнены два условия*:

$$(*)\ \forall x \in A:\ x \leqslant s. \quad (**)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A:\ s - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

(в) *Максимум* $\max A$ *множества* $A \subset \mathbb{R}$ *существует тогда и только тогда, когда* $\sup A \in A$. *В этом случае* $\max A = \sup A$.

(г) *Если* $B$ *– непустое подмножество ограниченного сверху множества* $A \subset \mathbb{R}$, *то* $\sup B \leqslant \sup A$.

(д) *Если непустые множества* $A$ *и* $B \subset \mathbb{R}$ *ограничены сверху, то множество* $A \cup B$ *также ограничено сверху и*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}. \tag{1}$$

(е) *Если непустые множества* $A$ *и* $B \subset \mathbb{R}$ *ограничены сверху и* $A \cap B \neq \varnothing$, *то* $\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$.

(ж) *Если непустые множества* $A$ *и* $B \subset \mathbb{R}$ *ограничены сверху, то множество* $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$ *также ограничено сверху и*

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B. \tag{2}$$

(з) *Если непустое множество* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху и* $\lambda \geqslant 0$, *то множество* $\lambda A = \{\lambda a;\ a \in A\}$ *также ограничено сверху и*

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A.$$

Доказательства. (а) Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ не пусто и ограничено сверху. Тогда множество $B$ всех его верхних граней также не пусто. Если $x \in A$ и $y \in B$, то $x \leqslant y$. По аксиоме непрерывности найдется $\xi \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant \xi \leqslant y$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. Поскольку $x \leqslant \xi$ для всех $x \in A$, то число $\xi$ – одна из верхних граней множества $A$. Поскольку $\xi \leqslant y$ для всех $y \in B$, то эта верхняя грань – наименьшая. Значит, $\xi = \min B = \sup A$. Существование $\sup A$ доказано. Его единственность очевидна.

(б) Условие (*) означает, что $s$ есть одна из верхних граней множества $A$. Условие (**) означает, что эта верхняя грань – наименьшая. Поэтому оба условия вместе равносильны равенству $s = \sup A$.

(в) Пусть $s = \sup A \in A$. Тогда $s \in A$ и $x \leqslant s$ для любого $x \in A$. Следовательно, $s = \max A$. Обратно, пусть число $s = \max A$ существует. Тогда $x \leqslant s$ для каждого $x \in A$, так что $s$ – верхняя грань для $A$. Если $b$ – произвольная верхняя грань множества $A$, то $s \leqslant b$, так как $s = \max A \in A$. Значит, число $s = \max A$ – наименьшая верхняя грань множества $A$, т.е. $s = \sup A$.

(г) Ясно, что множество $B \subset A$ также ограничено. Если $x \in B$, то $x \in A$ и, значит, $x \leqslant \sup A$. Таким образом, число $\sup A$ – одна из верхних граней множества $B$. Следовательно, $\sup B \leqslant \sup A$.

(д) Обозначим $m = \max\{\sup A, \sup B\}$. Если $x \in A \cup B$, то $x \in A$ или $x \in B$. В первом случае $x \leqslant \sup A \leqslant m$. Во втором случае $x \leqslant \sup B \leqslant m$. Таким образом, множество $A \cup B$ ограничено сверху числом $m$ и $\sup A \cup B \leqslant m$.

С другой стороны, $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$ и $\sup B \leqslant \sup(A \cup B)$ по свойству (г). Поэтому $m \leqslant \sup(A \cup B)$ и равенство (1) доказано.

(е) Пусть $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$. Поэтому $x \leqslant \sup A$ и $x \leqslant \sup B$. Следовательно, $x \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$. Таким образом, число $\min\{\sup A, \sup B\}$ – одна из верхних граней пересечения $A \cap B$ и поэтому $\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$.

(ж) Пусть $x \in A + B$, т.е. $x = a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$. Тогда $a \leqslant \sup A$, $b \leqslant \sup B$ и, значит, $x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$. Таким образом, число $\sup A + \sup B$ – одна из верхних граней множества $A + B$. Поэтому $\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$. Чтобы доказать обратное неравенство $\sup(A + B) \geqslant \sup A + \sup B$, допустим, что оно не справедливо, т.е. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$. Тогда

$$\varepsilon := \frac{1}{2}(\sup A + \sup B - \sup(A + B)) > 0.$$

По свойству (б) существуют числа $a_\varepsilon \in A$ и $b_\varepsilon \in B$ такие, что $\sup A < a_\varepsilon + \varepsilon$ и $\sup B < b_\varepsilon + \varepsilon$. Поскольку $a_\varepsilon + b_\varepsilon \in A + B$, то $a_\varepsilon + b_\varepsilon \leqslant \sup(A + B)$. Из этих неравенств вытекает противоречие:

$$2\varepsilon = \sup A + \sup B - \sup(A + B) < a_\varepsilon + b_\varepsilon + 2\varepsilon - \sup(A + B) < 2\varepsilon.$$

Таким образом, обратное неравенство также справедливо и искомое равенство (2) доказано.

(з) При $\lambda = 0$ обе части искомого равенства равны 0.

Пусть $\lambda > 0$. Если $x \in \lambda A$, т.е. $x = \lambda a$, где $a \in A$, то $a \leqslant \sup A$ и $x = \lambda a \leqslant \lambda \sup A$. Отсюда ясно, что $\sup(\lambda A) \leqslant \lambda \sup A$. Обратно, если $y \in A$, то $\lambda y \in \lambda A$, $\lambda y \leqslant \sup(\lambda A)$ и $y \leqslant \frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A)$. Поэтому $\sup A \leqslant \frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A)$, т.е. $\lambda \sup A \leqslant \sup(\lambda A)$. ◊

4.5. Определение. Пусть непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу. Наибольшая из его нижних граней обозначается $\inf A$ и называется *точной нижней гранью множества* $A$ или его *инфимумом*.

4.6. Свойства инфимума множества $A \subset \mathbb{R}$, ограниченного снизу.

(а) (Теорема Больцано). *Каждое непустое ограниченное снизу множество* $A \subset \mathbb{R}$ *имеет единственный инфимум*.

(б) *Пусть* $t \in \mathbb{R}$ *и непустое множество* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено снизу. Равенство* $t = \inf A$ *справедливо тогда и только тогда, когда выполнены два условия*:

$$(*)\ \forall x \in A:\ x \geqslant t. \quad (**)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A:\ t + \varepsilon > x_\varepsilon.$$

(в) *Минимум* $\min A$ *множества* $A \subset \mathbb{R}$ *существует тогда и только тогда, когда* $\inf A \in A$. *В этом случае* $\min A = \inf A$.

(г) *Если* $B$ *– непустое подмножество ограниченного снизу множества* $A \subset \mathbb{R}$, *то* $\inf B \geqslant \inf A$.

(д) *Если непустые множества* $A$ *и* $B \subset \mathbb{R}$ *ограничены снизу, то множество* $A \cup B$ *также ограничено снизу и*

$$\inf (A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

(е) *Если непустые множества* $A$ *и* $B \subset \mathbb{R}$ *ограничены снизу и* $A \cap B \neq \varnothing$, *то* $\inf (A \cap B) \geqslant \max\{\inf A, \inf B\}$.

(ж) *Если непустые множества* $A$ *и* $B \subset \mathbb{R}$ *ограничены снизу, то множество* $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$ *также ограничено снизу и*

$$\inf (A + B) = \inf A + \inf B.$$

(з) *Если непустое множество* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено снизу и* $\lambda \geqslant 0$, *то множество* $\lambda A = \{\lambda a;\ a \in A\}$ *также ограничено снизу и справедливо равенство* $\inf (\lambda A) = \lambda \inf A$.

(и) *Непустое множества* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху тогда и только тогда, когда множество* $-A = \{-a;\, a \in A\}$ *ограничено снизу. При этом справедливо равенство* $\inf(-A) = -\sup A$.

(к) *Непустое множества* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено снизу тогда и только тогда, когда множество* $-A = \{-a;\, a \in A\}$ *ограничено сверху. При этом справедливо равенство* $\sup(-A) = -\inf A$.

(л) *Если непустое множество* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху и* $\lambda \leqslant 0$, *то множество* $\lambda A = \{\lambda a;\, a \in A\}$ *ограничено снизу и справедливо равенство* $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$.

(м) *Если непустое множество* $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено снизу и* $\lambda \leqslant 0$, *то множество* $\lambda A = \{\lambda a;\, a \in A\}$ *ограничено сверху и справедливо равенство* $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$.

Доказательства. Свойства (а)–(з) доказываются также, как и аналогичные свойства супремума.

(и) Пусть множество $A$ ограничено сверху и $b \in \mathbb{R}$ – его верхняя грань. Тогда $\forall x \in A{:}\ x \leqslant b$. Отсюда $\forall x \in A{:}\ -b \leqslant -x$ по свойству 2.2(б) или, что то же, $\forall y \in (-A){:} -b \leqslant y$. Значит, число $-b$ – нижняя грань множества $-A$, так что множество $-A$ ограничено снизу.

Аналогично доказывается, что множество $A$ ограничено сверху, если множество $-A$ ограничено снизу.

Пусть $s = \sup A$. Для доказательства равенства $-s = \inf(-A)$ по свойству (б) достаточно показать, что выполнены условия:

(*) $\forall y \in (-A){:}\ y \geqslant -s$. (**) $\forall \varepsilon > 0\ \exists y_\varepsilon \in (-A){:}\ -s + \varepsilon > y_\varepsilon$.

Если $y \in (-A)$, то $y = -x$ для некоторого $x \in A$. Тогда $x \leqslant s$ и $-s \leqslant -x = y$ по свойству 2.2(б). Условие (*) выполнено.

Пусть $\varepsilon > 0$. По свойству 4.4(б) существует $x_\varepsilon \in A$ такое, что $s - \varepsilon < x_\varepsilon$. Полагая $y_\varepsilon = -x_\varepsilon$, получим $-x_\varepsilon \in (-A)$ и $-s + \varepsilon > y_\varepsilon$. Условие (**) также выполнено. Значит, $\inf(-A) = -s = -\sup A$.

(к) Это утверждение доказывается аналогично предыдущему.

(л) Пусть $\lambda \leqslant 0$ и пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ непусто и ограничено сверху. По свойству 4.4(з) множество $|\lambda| A = \{|\lambda| a;\, a \in A\}$ также ограничено сверху и $\sup(|\lambda|A)=|\lambda|\sup A$. Из условия $\lambda\leqslant 0$ следует, что $\lambda=-|\lambda|$. По свойству (и) множество

$$\lambda A=\{\lambda a;\ a\in A\}=\{-|\lambda|a;\ a\in A\}=-\{|\lambda|a;\ a\in A\}=-|\lambda|A$$

ограничено снизу и

$$\inf(\lambda A)=\inf(-|\lambda|A)=-\sup(|\lambda|A)=-|\lambda|\sup A=\lambda\sup A.$$

(м) Это утверждение доказывается аналогично предыдущему. ◊

4.7. Примеры. Пусть $a,b\in\mathbb{R}$ и $a<b$. Для сегмента $A=[a,b]$ существуют $\max[a,b]=b$ и $\min[a,b]=a$. Поэтому

$$\sup[a,b]=\max[a,b]=b,\quad \inf[a,b]=\min[a,b]=a.$$

Рассмотрим интервал $A=(a,b)$. Если $x\in(a,b)$, то $x>a$. Поэтому число $a$ является нижней гранью интервала $(a,b)$. Докажем, что эта нижняя грань – наименьшая. Пусть $z>a$. Обозначим $u=\dfrac{a+v}{2}$, где $v=\min\{z,b\}$. Тогда $v\leqslant z$, $v\leqslant b$ и $v>a$, так как $z>a$ и $b>a$. Отсюда

$$u=\frac{a}{2}+\frac{v}{2}>\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a,\quad u=\frac{a}{2}+\frac{v}{2}\leqslant\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{b}{2}+\frac{b}{2}=b,$$

так что $a<u<b$ и поэтому $u\in(a,b)$. Кроме того, $u<z$:

$$u=\frac{a}{2}+\frac{v}{2}\leqslant\frac{a}{2}+\frac{z}{2}<\frac{z}{2}+\frac{z}{2}=z,$$

т.е. $u<z$. Поэтому $z$ не является нижней гранью интервала $(a,b)$. Значит, $\inf(a,b)=a$. Аналогично доказывается, что $\sup(a,b)=b$.

Поскольку $a\notin(a,b)$ и $b\notin(a,b)$, то отсюда следует, что числа $\max(a,b)$ и $\min(a,b)$ не существуют. Впрочем, это нетрудно увидеть и непосредственно: Пусть $z=\max(a,b)$. Тогда $z\in(a,b)$ и, значит, $a<z<b$. Для середины $u=\dfrac{b+z}{2}$ интервала $(z,b)$ имеем $a<z<u<b$. Отсюда $u\in(a,b)$ и поэтому $u\leqslant z$, так как $z=\max(a,b)$. Но это противоречит неравенству $a<z<u<b$.

Аналогично доказывается, что

$$\sup[a,b)=\sup(a,b]=\max(a,b]=b,$$
$$\inf(a,b]=\inf[a,b)=\min[a,b)=a,$$

$$\sup(-\infty,b)=\sup(-\infty,b]=\max(-\infty,b]=b,$$
$$\inf(a,+\infty)=\inf[a,+\infty)=\min[a,+\infty)=a,$$
а $\min(a,b]$, $\max[a,b)$, $\max(-\infty,b)$ и $\min(a,+\infty)$ не существуют.

4.8. Замечание. Если множество $A\subset\mathbb{R}$ не ограничено сверху (соотв. снизу), то пишут $\sup A=+\infty$ (соотв. $\inf A=-\infty$ ). Кроме того, часто удобно считать, что $\sup\varnothing=-\infty$ и $\inf\varnothing=+\infty$.

Напомним (см. замечание 3.7), что символы $-\infty$ и $+\infty$ не принадлежат множеству $\mathbb{R}$ и не участвуют в определении смысла равенств $\sup A=+\infty$ и $\inf A=-\infty$. Смысл равенства $\sup A=+\infty$ полностью совпадает со смыслом утверждения «*множество $A$ не ограничено сверху*», т.е. $\forall b\in\mathbb{R}\ \exists x\in A:\ x>b$.

Впрочем, если использовать соглашение, что $-\infty<x<+\infty$ для каждого $x\in\mathbb{R}$, то можно считать, что символ $+\infty$ есть «верхняя грань» для каждого множества $A\subset\mathbb{R}$. Множество $A$, неограниченное сверху, «обычных» верхних граней не имеет, так что в этом случае символ $+\infty$ как раз и оказывается «наименьшей верхней гранью», т.е. «супремумом» множества $A$.

Аналогичное равенство $\inf A=-\infty$ равносильно утверждению «*множество $A$ не ограничено снизу*», т.е. $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists x\in A:\ x<a$.

Примеры: Если $a$ и $b\in\mathbb{R}$, то $\sup[a,+\infty)=\sup(a,+\infty)=+\infty$, $\inf(-\infty,b)=\inf(-\infty,b]=-\infty$, $\sup\mathbb{R}=+\infty$ и $\inf\mathbb{R}=-\infty$.

4.9. Кроме неравенства $-\infty<x<+\infty$ иногда возникает потребность использовать выражения $a+b$ и $ab$, где $a$ и / или $b\in\in\{-\infty,+\infty\}$. В подобных случаях предполагают, что действуют следующие «естественные» правила:
$$-(-\infty)=+\infty,\ \ -(+\infty)=-\infty,$$
$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty,\ \ (+\infty)+(+\infty)=+\infty,$$
$$(-\infty)+a=a+(-\infty)=-\infty,\ \ (+\infty)+a=a+(+\infty)=+\infty\ \ \forall a\in\mathbb{R},$$
$$(-\infty)(-\infty)=(+\infty)(+\infty)=+\infty,\ \ (-\infty)(+\infty)=(+\infty)(-\infty)=-\infty,$$
$$\text{если } p\in\mathbb{R} \text{ и } p>0, \text{ то } p(-\infty)=-\infty \text{ и } p(+\infty)=+\infty,$$
$$\text{если } q\in\mathbb{R} \text{ и } q<0, \text{ то } q(-\infty)=+\infty \text{ и } q(+\infty)=-\infty.$$

Выражения $0\cdot(-\infty)$, $0\cdot(+\infty)$, $(-\infty)\cdot 0$, $(+\infty)\cdot 0$, $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$ не имеют смысла.

4.10. Задачи. Для любых множеств $A,\ B\subset\mathbb{R}$ обозначим $A\cdot B=$ $=\{ab;\ a\in A,\ b\in B\}$ и $A^{-1}=\{a^{-1};\ a\in A\}$. Доказать утверждения:

(а) Если множества $A,\ B\subset[0,+\infty)$ непусты, то
$$\inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B.$$

(б) Если непустые множества $A,\ B\subset[0,+\infty)$ ограничены, то
$$\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B.$$

(в) Если множества $A,\ B\subset(-\infty,0]$ непусты, то
$$\inf(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B.$$

(г) Если непустые множества $A,\ B\subset(-\infty,0]$ ограничены, то
$$\sup(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B.$$

(д) Если множества $A\subset[0,+\infty)$ и $B\subset(-\infty,0]$ непусты, то
$$\sup(A\cdot B)=\inf A\cdot\sup B.$$

(е) Если непустые множества $A\subset[0,+\infty)$ и $B\subset(-\infty,0]$ ограничены, то $\inf(A\cdot B)=\sup A\cdot\inf B.$

(ж) Непустое множество $A\subset(0,+\infty)$ ограничено тогда и только тогда, когда $\inf(A^{-1})>0$. В этом случае $\inf(A^{-1})=(\sup A)^{-1}$.

(з) Пусть множество $A\subset(0,+\infty)$ непусто. Множество $A^{-1}$ ограничено тогда и только тогда, когда $\inf A>0$. В этом случае
$$\sup(A^{-1}) = (\inf A)^{-1}.$$

## §5. Натуральные числа

В конструктивных теориях вещественного числа, излагаемых во многих учебниках для вузов, обычно предполагается, что натуральные (а также *целые* и *рациональные*) числа *уже известны*. В аксиоматической теории такие числа надо как-то *выделить* из всего множества $\mathbb{R}$. Для этого введем сначала понятие индуктивного множества.

5.1. Определение. Множество $A\subset\mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если оно обладает двумя свойствами

(*) $1\in A$. (**) Из $a\in A$ вытекает $a+1\in A$.

Примеры. Все множество $\mathbb{R}$ индуктивно. Для всякого числа $a<1$ множества $[a,+\infty)$ и $(a,+\infty)$ индуктивны. Множества

$$[1,+\infty),\ \{1\}\cup[2,+\infty),\ \{1,2\}\cup[3,+\infty),\ \{1,2,3\}\cup[4,+\infty)$$

также индуктивны.

Лемма. *Пересечение семейства индуктивных множеств индуктивно.*

Доказательство. Действительно, пусть $(A_i;\ i\in I)$ – произвольное семейство индуктивных множеств $A_i\subset\mathbb{R}$ и $B$ – их пересечение. Из индуктивности множеств $A_i$ следует, что $1\in A_i$ для всех $i\in I$. Поэтому $1\in B$. Пусть теперь $a\in B$. Тогда $a\in A_i$ для каждого $i\in I$. Поскольку все множества $A_i$ индуктивны, то $a+1\in A_i$ также для каждого $i\in I$. Отсюда $a+1\in B$. Значит, $B$ индуктивно. ◊

Следствие. *Пересечение всех индуктивных множеств индуктивно.* ◊

5.2. Определение. Пересечение всех индуктивных множеств обозначается $\mathbb{N}$. Его элементы называются *натуральными числами*.

Из индуктивности множества $\mathbb{N}$ следует, что $k+1\in\mathbb{N}$ для всякого $k\in\mathbb{N}$. Ясно также, что $1\in\mathbb{N}$. Более того, *число* $1$ *является наименьшим натуральным числом*. Действительно, множество $\mathbb{N}$ содержится в индуктивном множестве $[1,+\infty)$. Поэтому $k\geqslant 1$ для каждого $k\in\mathbb{N}$ и, следовательно, $\min\mathbb{N}=1$.

5.3. Теорема. (Принцип индукции). *Пусть каждому* $k\in\mathbb{N}$ *поставлено в соответствие утверждение* $P(k)$, *причем выполнены два условия*

(*) $P(1)$ *верно.* (**) $\forall k\in\mathbb{N}\colon P(k)\Rightarrow P(k+1)$.

*Тогда справедливы все утверждения* $P(k)$, $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $A$ – множество всех $k\in\mathbb{N}$, для которых $P(k)$ верно. Тогда $1\in A$ по условию (*). По условию (**) из $k\in A$ следует $k+1\in A$. Значит, множество $A$ индуктивно. Поэтому $\mathbb{N}\subset A$, т.е. утверждение $P(k)$ верно для каждого $k\in\mathbb{N}$. ◊

Принцип индукции лежит в основе метода доказательства теорем, известного как *Метод математической индукции*. Для доказательства утверждений $P(k)$, $k \in \mathbb{N}$, методом математической индукции согласно теореме 5.3 достаточно доказать два факта:

1) *Искомое утверждение справедливо для* $k=1$.

2) *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *из* $P(k)$ *вытекает* $P(k+1)$.

5.4. Простейшие свойства натуральных чисел.

(а) *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *то* $n+k \in \mathbb{N}$.

(б) *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *то* $nk \in \mathbb{N}$.

(в) *Если* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, *то* $n-1 \in \mathbb{N}$.

(г) *Если* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $n > k$, *то* $n-k \in \mathbb{N}$.

(д) *Если* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $n > k$, *то* $n \geqslant k+1$.

(е) *Если* $n \in \mathbb{N}$, *то* $\mathbb{N} \cap (n, n+1) = \varnothing$.

(ж) *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $A = \{k \in \mathbb{N};\, k > n\}$, *то* $n+1 = \min A$.

(з) *Множество* $\mathbb{N}$ *всех натуральных чисел не ограничено сверху*.

(и) $\inf\left\{\frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$, $\sup\left\{\frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} = \max\left\{\frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} = 1$.

(к) $\inf\left\{\frac{n+1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} = 1$, $\max\left\{\frac{n+1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} = 2$.

(л) $\sup\left\{\frac{n-1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} = 1$, $\min\left\{\frac{n-1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

Доказательства. (а) Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $P(k)$ утверждение $n+k \in \mathbb{N}$. Утверждение $P(1)$, т.е. $n+1 \in \mathbb{N}$, вытекает из индуктивности $\mathbb{N}$.

Пусть теперь $k \in \mathbb{N}$ таково, что $n+k \in \mathbb{N}$. Согласно методу математической индукции надо доказать, что тогда $n+(k+1) \in \mathbb{N}$. Но это очевидно, так как $n+k \in \mathbb{N}$ и, значит, $n+(k+1) = (n+k)+1 \in \mathbb{N}$ ввиду индуктивности множества $\mathbb{N}$. Индукция проведена и утверждение $n+k \in \mathbb{N}$ доказано для всех $k \in \mathbb{N}$.

(б) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $P(k)$ утверждение $nk \in \mathbb{N}$. Утверждение $P(1)$, т.е. $n \cdot 1 \in \mathbb{N}$, справедливо. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и пусть $nk \in \mathbb{N}$. Тогда $n(k+1) = nk + n \in \mathbb{N}$ по свойству (а). Таким образом, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. По принципу индукции $nk \in \mathbb{N}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

(в) Допустим, что $n-1 \notin \mathbb{N}$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Докажем, что тогда множество $A = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ индуктивно. Из $n \neq 1$ следует, что $1 \in A$. Пусть теперь $a \in A$. Тогда $a \in \mathbb{N}$ и $a \neq n$. Из $a \in \mathbb{N}$ вытекает $a+1 \in \mathbb{N}$. Кроме того, $(a+1)-1 = a \in \mathbb{N}$, а $n-1 \notin \mathbb{N}$. Значит, $a+1 \neq n$ и, стало быть, $a+1 \in A$. Индуктивность множества $A$ доказана. Поэтому $\mathbb{N} \subset A$ вопреки равенству $A = \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Следовательно, $n-1 \in \mathbb{N}$ для всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(г) Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим утверждение

$$\text{Если } n \in \mathbb{N} \text{ и } n > k, \text{ то } n-k \in \mathbb{N}. \tag{α}$$

При $k=1$ утверждение (α) совпадает со свойством (в). Фиксируем произвольно $k \in \mathbb{N}$ и допустим, что для него утверждение (α) справедливо. Надо доказать, что тогда справедливо и утверждение

$$\text{Если } n \in \mathbb{N} \text{ и } n > k+1, \text{ то } n-(k+1) \in \mathbb{N}. \tag{β}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > k+1$. Тогда $n > 1$. Значит, $n-1 \in \mathbb{N}$ по свойству (в). Из $n > k+1$ следует $n-1 > k$. Применяя (α), заключаем, что $(n-1)-k \in \mathbb{N}$, или, что то же, $n-(k+1) \in \mathbb{N}$. Вывод (β) из (α) завершен. По принципу индукции (α) справедливо для всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. $n-k \in \mathbb{N}$ всякий раз, когда $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $n > k$.

(д) Пусть $n,k \in \mathbb{N}$ и $n > k$. По свойству (г) тогда $n-k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $n-k \geqslant \min \mathbb{N} = 1$. Отсюда ясно, что $n \geqslant k+1$.

(е) Это легко вытекает из предыдущего свойства (д).

(ж) Это также легко вытекает из свойства (д).

(з) Допустим, что множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда по теореме Больцано 4.4(а) существует $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Число $z = s-1$ уже не является верхней гранью для $\mathbb{N}$. Поэтому $z < k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $k+1 \in \mathbb{N}$, то по определению $s = \sup \mathbb{N}$ должно быть $k+1 \leqslant s$. Однако из $s-1 = z < k$ вытекает, что $s < k+1$. Противоречие. Значит, множество $\mathbb{N}$ не ограничено сверху. ◊

(и) Обозначим $A=\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Очевидно $1\in A$. Если $n\in\mathbb{N}$, то $n\geqslant 1$ и $0<\frac{1}{n}\leqslant 1$ по свойству 2.5(м). Поэтому $\max A=\sup A=1$.

Отсюда же ясно, что $0$ является нижней гранью множества $A$. Докажем, что эта нижняя грань – наименьшая. Пусть $\varepsilon>0$. По свойству (з) $m>\frac{1}{\varepsilon}$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$. Тогда $\frac{1}{m}\in A$ и $\varepsilon>\frac{1}{m}$ по свойству 2.5(ж). Значит, число $\varepsilon>0$ не является нижней гранью множества $A$. Следовательно, $\inf A=0$.

(к) Если $A=\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$ и $B=\left\{\frac{n+1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$, то $B=\{1\}+A$. Отсюда $\inf B=\inf\{1\}+\inf A=1+0=1$ по свойствам (и) и 4.6(ж).

Кроме того, $\frac{n+1}{n}\leqslant\frac{n+n}{n}=\frac{2n}{n}=2=\frac{1+1}{1}$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ по свойствам 1.5(г) и 2.5(е). Поэтому $\max B=\sup B=2$.

(л) Если $A=\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$ и $C=\left\{\frac{n-1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$, то $C=\{1\}-A=$ $=\{1\}+(-A)$. Отсюда $\sup C=\sup\{1\}+\sup(-A)=1-\inf A=1-0=1$ по свойствам (и), 4.4(ж) и 4.6(к). Кроме того, $\frac{n-1}{n}\geqslant\frac{1-1}{n}=0=\frac{1-1}{1}$. Поэтому $\min C=\inf C=0$. ◊

Из свойства 5.4(е) вытекает еще одна форма принципа индукции:

5.5. Теорема. (2-я форма принципа индукции). *Пусть каждому* $n\in\mathbb{N}$ *сопоставлено утверждение* $P(n)$, *причем выполнены два условия*:

(*) *Утверждение* $P(1)$ *справедливо.*

(**) *Для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *из справедливости всех утверждений* $P(k)$, $1\leqslant k\leqslant n$, *вытекает справедливость утверждения* $P(n+1)$.

*Тогда справедливы все утверждения* $P(k)$, $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Обозначим через $Q(n)$, $n\in\mathbb{N}$, утверждение:

$$P(k) \text{ справедливо для всех } k\in\mathbb{N} \text{ таких, что } 1\leqslant k\leqslant n.$$

Утверждение $Q(1)$ совпадает с $P(1)$ и, значит, верно. Пусть теперь $n\in\mathbb{N}$ и $Q(n)$ справедливо. Тогда справедливы все $P(k)$, $1\leqslant k\leqslant n$. По условию (**) отсюда следует, что справедливо и $P(n+1)$. Применяя свойство 5.4(е), заключаем, что справедливы все $P(k)$, где $1\leqslant k\leqslant n+1$, т.е. справедливо $Q(n+1)$. Таким образом, $Q(1)$ выполнено и для каждого $n\in\mathbb{N}$ из $Q(n)$ вытекает $Q(n+1)$. По принципу индукции 5.3 отсюда следует, что справедливы все $Q(n)$, а значит, справедливы и все $P(n)$, $n\in\mathbb{N}$. ◊

## §6. Целые числа

6.1. Определение. Множество $\mathbb{Z}$ всех *целых чисел* определяется равенством

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup(-\mathbb{N}),\ \text{где}\ -\mathbb{N}=\{-n;\ n\in\mathbb{N}\}=\{-1,-2,\ldots\}.$$

6.2. Простейшие свойства целых чисел.

(а) *Если* $m\in\mathbb{Z}$, *то* $-m\in\mathbb{Z}$ *и* $|m|\in\mathbb{Z}$.

(б) *Если* $m\in\mathbb{Z}$ *и* $k\in\mathbb{Z}$, *то* $m+k\in\mathbb{Z}$ *и* $m-k\in\mathbb{Z}$.

(в) *Если* $m\in\mathbb{Z}$ *и* $k\in\mathbb{Z}$, *то* $mk\in\mathbb{Z}$.

(г) *Если* $m\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$ *и* $k<m$, *то* $k+1\leqslant m$ и $k\leqslant m-1$.

(д) *Если* $m\in\mathbb{Z}$, *то* $\mathbb{Z}\cap(m,m+1)=\varnothing$.

(е) *Если* $m\in\mathbb{Z}$ *и* $A=\{k\in\mathbb{Z};\,k>m\}$, *то* $m+1=\min A$.

(ж) *Если* $m\in\mathbb{Z}$ *и* $A=\{k\in\mathbb{Z};\,k<m\}$, *то* $m-1=\max A$.

(з) *Если* $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$, *то* $m^{-1}\notin\mathbb{Z}$.

(и) *Если множество* $A\subset\mathbb{Z}$ *не пусто и ограничено сверху, то существует* $\max A$. *Если множество* $A\subset\mathbb{Z}$ *не пусто и ограничено снизу, то существует* $\min A$. *В частности, любое непустое множество* $A\subset\mathbb{N}$ *имеет* $\min A$.

(к) *Множество* $\mathbb{N}$ *всех натуральных чисел не ограничено сверху. Множество* $\mathbb{Z}$ *всех целых чисел неограниченно ни сверху, ни снизу.*

Доказательства. (а) Это очевидно.

(б) Пусть $m$, $k\in\mathbb{Z}$. Докажем, что тогда $m+k\in\mathbb{Z}$. Если $m=0$ или $k=0$, то это очевидно. Пусть $m\neq0$ и $k\neq0$.

Если $m$ и $k\in\mathbb{N}$, то $m+k\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ по свойству 5.4(а).

Если $m,\ k\in -\mathbb{N}$, то $-m, -k\in\mathbb{N}$ и $-(m+k)=-m-k=(-m)+$ $+(-k)\in\mathbb{N}$ по свойствам 1.2(ж) и 5.4(а). Значит, $m+k\in -\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

Пусть теперь $m\in\mathbb{N}$ и $k\in -\mathbb{N}$. Тогда $-k\in\mathbb{N}$. Если $-k=m$, то $m+k=0\in\mathbb{Z}$. Если $-k<m$, то $m+k=m-(-k)\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ по свойствам 1.2(в) и 5.4(г). Если $-k>m$, то $-(k+m)=(-k)-m\in\mathbb{N}$ по свойствам 1.2(ж) и 5.4(г) и, следовательно, $m+k\in -\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

Случай $m\in -\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{N}$ аналогичен предыдущему. Доказательство соотношения $m+k\in\mathbb{Z}$ завершено. Соотношение $m-k\in\mathbb{Z}$ вытекает из предыдущего, так как $-k\in\mathbb{Z}$ по свойству (а).

(в) Если $m,\ k\in\mathbb{N}$, то $mk\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ по свойству 5.4(б).

Если $m=0$ или $k=0$, то $mk=0\in\mathbb{Z}$ по свойству 1.4(а).

Если $m,\ k\in -\mathbb{N}$, то $-m,\ -k\in\mathbb{N}$ и $mk=(-m)(-k)\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ по свойствам 1.4(е) и 5.4(б).

Если $m\in\mathbb{N}$ и $k\in -\mathbb{N}$, то $-k\in\mathbb{N}$, $m(-k)\in\mathbb{N}$ и $mk=$ $=(-m)(-k)=-m(-k)\in -\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ по свойствам 5.4(б) и 1.4(е).

(г) Если $m,\ k\in\mathbb{N}$ и $k<m$, то $k+1\leqslant m$ по свойству 5.4(д).

Если $m\in\mathbb{N}$ и $k=0$, то $k+1=1=\min\mathbb{N}\leqslant m$.

Если $m\in\mathbb{N}$ и $k\in -\mathbb{N}$, то $k\leqslant -1$ и $k+1\leqslant 0<1\leqslant m$.

Если $m=0$, $k\in\mathbb{Z}$ и $k<m$, то $k\in -\mathbb{N}$, $k\leqslant -1$ и $k+1\leqslant 0=m$.

Если $m\in -\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$ и $k<m$, то $-m\in\mathbb{N}$, $k\in -\mathbb{N}$, $-k\in\mathbb{N}$, $-k>-m$ по свойству 2.3(б), $-k\geqslant -m+1$ по свойству 5.4(д), $-k-1\geqslant -m$ по свойствам 1.4(е) и 2.3(г), $k+1\leqslant m$ по свойству 2.3(б).

Неравенство $k+1\leqslant m$ доказано. По свойствам 1.2(е) и 2.3(г) отсюда следует также неравенство $k\leqslant m-1$.

(д), (е), (ж) Это – очевидные следствия свойства (г).

(з) Пусть $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$. Тогда $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ или $m\in -\mathbb{N}\setminus\{-1\}$.

Если $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, то $m>1$ и $0<m^{-1}<1$ по свойствам 2.4(ж) и 1.3(а). Значит, $m^{-1}\neq 0$, $m^{-1}\notin -\mathbb{N}$, так как все $k\in -\mathbb{N}$ отрицательны, и $m^{-1} \notin \mathbb{N}$, так как из $k \in \mathbb{N}$ следует $k \geqslant 1$. Поэтому $m^{-1} \notin \mathbb{Z}$.

Пусть $m \in -\mathbb{N} \setminus \{-1\}$. Тогда $m < -1$ и $-1 < m^{-1} < 0$ по свойствам 2.4(з) и 1.3(з). Значит, $m^{-1} \neq 0$, $m^{-1} \notin \mathbb{N}$ и $m^{-1} \notin -\mathbb{N}$, так как $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (k > 0)$ и $(k \in -\mathbb{N}) \Rightarrow (k \leqslant -1)$. Поэтому $m^{-1} \notin \mathbb{Z}$.

(и) Пусть непустое множество $A \subset \mathbb{Z}$ ограничено сверху. По теореме Больцано 4.4(а) существует $s = \sup A \in \mathbb{R}$. Число $s-1$ уже не является верхней гранью множества $A$. Значит, есть $k \in A$ такое, что $s-1 < k$. По свойству (г) тогда $s \leqslant k$. Из соотношений $s = \sup A$ и $k \in A$ следует, что $k \leqslant s$. Таким образом, $\sup A = s = k \in A$. Применяя свойство 4.4(в), заключаем, что $s = k = \max A$.

Вторая часть свойства доказывается аналогично.

Третья часть свойства вытекает из второй.

(к) Если $n \in \mathbb{N}$, то $n+1 \in \mathbb{N}$ и $n+1 > n$. Поэтому во множестве $\mathbb{N}$ нет наибольшего элемента. По предыдущему свойству (и) отсюда следует, что множество $\mathbb{N}$ не ограничено сверху. (Этот факт уже отмечен в свойстве 5.4(з)). Во множестве $\mathbb{Z}$ нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов. Согласно свойству (и) отсюда следует, что множество $\mathbb{Z}$ не ограничено ни сверху, ни снизу. ◊

6.3. Теорема. (3-я форма принципа индукции). *Пусть $a \in \mathbb{Z}$ и пусть утверждение $P(m)$ определено для всех целых $m \geqslant a$. Допустим, что выполнены два условия*:

(*) $P(a)$ *верно*; (**) $\forall m \in \mathbb{Z},\ m \geqslant a : P(m) \Rightarrow P(m+1)$.

*Тогда справедливы все утверждения $P(m)$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $m \geqslant a$.*

Доказательство. Пусть $Q(n) = P(a+n-1)$. Утверждение $Q(n)$ имеет смысл для всех $n \in \mathbb{N}$, так как $a+n-1 \in \mathbb{Z}$ и $a+n-1 \geqslant a+1-1 = a$ при $n \in \mathbb{N}$. Утверждение $Q(1) = P(a)$ по условию (*) справедливо. Если $n \in \mathbb{N}$, то по условию (**) $P(a+n-1) \Rightarrow P(k+n)$ или, что то же, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Применяя теорему 5.3, заключаем, все $Q(n)$, $n \in \mathbb{N}$, справедливы. Если $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant a$, то полагая $n = m+1-a$, мы получим $n \in \mathbb{N}$ такое, что,

$P(m)=P(a+n-1)=Q(n)$. Поэтому все утверждения $P(m)$, где $m\in\mathbb{Z}$ и $m\geqslant a$, справедливы. ◊

Аналогично доказывается еще одна версия принципа индукции:

6.4. Теорема. (4-я форма принципа индукции). *Пусть* $a\in\mathbb{Z}$ *и пусть утверждение* $P(m)$ *определено для всех целых* $m\leqslant a$. *Допустим, что выполнены два условия*:

(*) $P(a)$ *верно*; (**) $\forall m\in\mathbb{Z},\ m\leqslant a: P(m)\Rightarrow P(m-1)$.

*Тогда справедливы все утверждения* $P(m)$, *где* $m\in\mathbb{Z}$ *и* $m\leqslant a$.

6.5. Древнегреческий математик и механик Архимед использовал в качестве аксиомы утверждение: *Если на прямой заданы отрезки* $A$ *и* $B$, *то отрезок* $A$ *можно повторить слагаемым столько раз, чтобы сумма была больше отрезка* $B$. Соответствующее свойство числовой прямой называется *принципом Архимеда*.

Теорема. (Принцип Архимеда). *Для любых* $\varepsilon>0$ *и* $x\in\mathbb{R}$ *существует единственное целое число* $n$ *такое, что* $n\varepsilon\leqslant x<(n+1)\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и $x\in\mathbb{R}$. Множество

$$A=\{k\in\mathbb{Z};\, k\varepsilon\leqslant x\}=\left\{k\in\mathbb{Z};\, k\leqslant\frac{x}{\varepsilon}\right\}.$$

ограничено сверху числом $\dfrac{x}{\varepsilon}$ и не пусто (иначе $\mathbb{Z}$ было бы ограничено снизу тем же числом вопреки свойству 6.2(к)). По свойству 6.2(и) существует $n=\max A$. Из $n\in A$ следует, что $n\in\mathbb{Z}$ и $n\varepsilon\leqslant x$. Поскольку $n=\max A$ и $n+1>n$, то $n+1\notin A$. Но $n+1\in\mathbb{Z}$ по свойству 6.2(б). Из $n+1\in\mathbb{Z}\setminus A$ следует, что $(n+1)\varepsilon>x$. Таким образом, $n\in\mathbb{Z}$ и $n\varepsilon\leqslant x<(n+1)\varepsilon$.

Существование искомого числа $n\in\mathbb{Z}$ доказано. Чтобы доказать его единственность, допустим, что есть еще $m\in\mathbb{Z}$ такое, что $m\varepsilon\leqslant x<(m+1)\varepsilon$. Пусть для определенности $n<m$. Тогда $n+1\leqslant m$ и $x<(n+1)\varepsilon\leqslant m\varepsilon\leqslant x$, т.е. $x<x$. Противоречие. ◊

6.6. Следствие. *Для любого* $x\in\mathbb{R}$ *существует единственное целое число* $n$ *такое, что* $n\leqslant x<n+1$.

Определение. Число $n \in \mathbb{Z}$ называется *целой частью* числа $x \in \mathbb{R}$, если $n \leqslant x < n+1$. Целая часть числа $x$ обозначается $[x]$. Разность $x-[x]$ называется *дробной частью* числа $x$.

Ясно, что всегда $0 \leqslant x-[x] < 1$.

## §7. Рациональные числа

7.1. Определение. Число $r \in \mathbb{R}$ называется *рациональным*, если оно представимо в виде $r=\dfrac{n}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Множество всех рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$. Элементы множества $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называются *иррациональными числами*.

7.2. Простейшие свойства рациональных чисел:

(а) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. *В частности* $0$ *и* $1 \in \mathbb{Q}$.

(б) *Если* $r \in \mathbb{Q}$, *то* $-r \in \mathbb{Q}$ *и* $|r| \in \mathbb{Q}$.

(в) *Если* $r \in \mathbb{Q}$ *и* $s \in \mathbb{Q}$, *то* $r+s$, $r-s$ *и* $rs \in \mathbb{Q}$.

(г) *Если* $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, *то* $r^{-1} \in \mathbb{Q}$.

(д) *Если* $r \in \mathbb{Q}$ *и* $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, *то* $\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.

(е) *Рациональные числа образуют упорядоченное поле.*

(ж) *Множество* $\mathbb{Q}$ *не ограничено ни сверху, ни снизу.*

(з) *Если* $a<b$, *то* $\mathbb{Q} \cap (a,b) \neq \varnothing$, *т.е. в любом интервале есть рациональные числа.*

(и) *Если* $c \in \mathbb{R}$, *то* $\inf \mathbb{Q} \cap (c,+\infty)=c$ *и* $\sup \mathbb{Q} \cap (-\infty,c)=c$.

(к) *Если* $a<b$, *то* $\inf \mathbb{Q} \cap (a,b)=a$ *и* $\sup \mathbb{Q} \cap (a,b)=b$.

Доказательства. (а) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ по определению $\mathbb{Z}$. Если $n \in \mathbb{Z}$, то по свойству 1.5(а) $n=\dfrac{n}{1} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

(б) Пусть $r \in \mathbb{Q}$, т.е. $r=\dfrac{n}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $-n \in \mathbb{Z}$ и $|n| \in \mathbb{Z}$ по свойству 6.2(а). Кроме того, $-r=\dfrac{-n}{k}$, по свойству 1.5(ж) и $|r|=\dfrac{|n|}{|k|}=\dfrac{|n|}{k}$ по свойству 2.7(г). Отсюда ясно, что $-r$ и $|r| \in \mathbb{Q}$.

(в) Пусть $r=\dfrac{n}{k}$ и $s=\dfrac{p}{q}$, где $k,q\in\mathbb{N}$ и $n,p\in\mathbb{Z}$. Тогда

$$r\pm s=\frac{n}{k}\pm\frac{p}{q}=\frac{nq\pm kp}{kq} \text{ и } rs=\frac{n}{k}\frac{p}{q}=\frac{np}{kq} \qquad (*)$$

по свойству 1.5(и), $kq\in\mathbb{N}$ по свойству 5.4(б), $nq,\ kp,\ np\in\mathbb{Z}$ по свойству 6.2(в) и $nq\pm kp\in\mathbb{Z}$ по свойству 6.2(б). Отсюда и из равенств (*) ясно, что $r\pm s\in\mathbb{Q}$ и $rs\in\mathbb{Q}$.

(г) Пусть $r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, т.е. $r=\dfrac{n}{k}$, где $k\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. По свойству 1.5(е) имеем $r^{-1}=\left(\dfrac{n}{k}\right)^{-1}=\dfrac{k}{n}$.

Из $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ следует, что $n\in\mathbb{N}$ или $n\in-\mathbb{N}$. Если $n\in\mathbb{N}$, то сразу ясно, что $r^{-1}=\dfrac{k}{n}\in\mathbb{Q}$. Пусть $n\in-\mathbb{N}$. В этом случае применяя свойства 1.2(в) и 1.5(ж), также получим: $r^{-1}=\dfrac{k}{n}=\dfrac{-k}{-n}\in\mathbb{Q}$.

(д) Пусть $r=\dfrac{n}{k}$ и $s=\dfrac{p}{q}\neq 0$, где $k,q\in\mathbb{N}$ и $n,p\in\mathbb{Z}$, причем $p\neq 0$ по свойству 1.5(а). Тогда $\dfrac{r}{s}=\dfrac{n}{k}:\dfrac{p}{q}=\dfrac{nq}{kp}$ по свойству 1.5(к), $nq,\ kp\in\mathbb{Z}$ по свойству 6.2(в) и $kp\neq 0$ по свойству 1.4(в). Значит, $kp\in\mathbb{N}$ или $kp\in-\mathbb{N}$. Если $kp\in\mathbb{N}$, то очевидно $\dfrac{r}{s}=\dfrac{nq}{kp}\in\mathbb{Q}$. Пусть $kp\in-\mathbb{N}$. По свойствам 1.2(в) и 1.5(ж), имеем $\dfrac{r}{s}=\dfrac{nq}{kp}=\dfrac{-nq}{-kp}\in\mathbb{Q}$, так как теперь $-kp\in\mathbb{N}$ и $-nq\in\mathbb{Z}$.

(е) Из предыдущих свойств следует, что $r+s,\ rs,\ -r\in\mathbb{Q}$ для всех $r,s\in\mathbb{Q}$ и еще $r^{-1}\in\mathbb{Q}$, если $r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Кроме того, $0,1\in\mathbb{Q}$. Все прочие требования определения упорядоченного поля (т.е. аксиомы С1÷С4, У1÷У5, П1÷П6) выполнены, так как они выполнены уже во множестве $\mathbb{R}$. Поэтому $\mathbb{Q}$ – упорядоченное поле.

(ж) Поскольку множество $\mathbb{Z}$ не ограничено ни сверху, ни снизу (свойство 6.2(к)) и поскольку $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ (свойство (а)), то множество $\mathbb{Q}$ также не ограничено ни сверху, ни снизу.

(з) Пусть $a<b$ и, значит, $b-a>0$. Поскольку множество $\mathbb{N}$ не ограничено сверху, то найдется $n\in\mathbb{N}$ такое, что $n>\dfrac{1}{b-a}$. Тогда $n(b-a)>1$ и $b-a>\dfrac{1}{n}$ по свойству 2.5(ж). Согласно принципу Архимеда 6.5 для $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ и $x=a$ существует $k\in\mathbb{Z}$ такое, что $\dfrac{k}{n}\leqslant a<\dfrac{k+1}{n}$. Число $r=\dfrac{k+1}{n}$ рационально, $a<r$ и, кроме того,

$$r=\frac{k+1}{n}=\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\leqslant a+\frac{1}{n}<a+(b-a)=b.$$

Таким образом, $a<r<b$ и, следовательно, $r\in\mathbb{Q}\cap(a,b)$.

(и) Обозначим $A=\mathbb{Q}\cap(c,+\infty)$. Для каждого $r\in A$ имеем $c<r$. Пусть $\varepsilon>0$. По свойству (з) существует $r_\varepsilon\in\mathbb{Q}\cap(c,c+\varepsilon)$. Для этого $r_\varepsilon$ имеем $r_\varepsilon<c+\varepsilon$, $r_\varepsilon\in\mathbb{Q}$ и $r_\varepsilon>c$, т.е. $r_\varepsilon\in A$. Применяя свойство 4.6(б), заключаем, что $c=\inf A=\inf\mathbb{Q}\cap(c,+\infty)$.

Равенство $\sup\mathbb{Q}\cap(-\infty,c)=c$ доказывается аналогично.

(к) Ясно, что $r<b$ для каждого $r\in\mathbb{Q}\cap(a,b)$. Пусть $\varepsilon>0$ и $c=\max\{a,b-\varepsilon\}$. Тогда $a\leqslant c<b$. По свойству (з) существует $r_\varepsilon\in\mathbb{Q}\cap(c,b)$. Для этого $r_\varepsilon$ имеем $r_\varepsilon>c\geqslant b-\varepsilon$, $r_\varepsilon\in\mathbb{Q}$, $r_\varepsilon<b$ и $r_\varepsilon>c\geqslant a$. Отсюда $r_\varepsilon\in\mathbb{Q}\cap(a,b)$. По свойству 4.4(б) заключаем, что $b=\sup\mathbb{Q}\cap(a,b)$. Аналогично доказывается, что $\inf\mathbb{Q}\cap(a,b)=a$ . ◊

7.3. Задача. Доказать, что число $\sqrt{2}$ (см. пример 4.5) иррационально. Вывести отсюда, что в любом интервале $(a,b)$ есть иррациональные числа. Найти $\inf A$ и $\sup A$, где $A=(a,b)\setminus\mathbb{Q}$.

## §8. Сумма и произведение конечного семейства чисел

В силу ассоциативности сложения в суммах вида $a+b+c$, $a+b+c+d$, $a+b+c+d+e$, $\ldots$ скобки можно расставлять как угодно и тем самым такие суммы определены по крайней мере тогда, когда мы в состоянии фактически выписать все слагаемые. Если же слагаемых «слишком много», то пишут выражения вида $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ или $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Метод математической индукции позволяет дать строгое определение такой суммы.

8.1. Определение. Сумма $\sum\limits_{k=1}^{1} a_k$, т.е. сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ при $n=1$, объявляется равной ее единственному слагаемому $a_1$. Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ и пусть *сумма* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ определена всякий раз, когда заданы числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, (т.е. каждому $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, сопоставлено число $a_k$). Если заданы числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, то

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

Если $p, q \in \mathbb{Z}$, $p < q$, и каждому $k \in \mathbb{Z}, p < k \leqslant q$, сопоставлено число $a_k$, то можно говорить о сумме $\sum\limits_{k=p+1}^{q} a_k$. Она также определяется по индукции: Если $q = p+1$, то $\sum\limits_{k=p+1}^{p+1} a_k := a_{p+1}$. Пусть $p, q \in \mathbb{Z}, p < q$, и пусть суммы $\sum\limits_{k=p+1}^{q} a_k$ определены. Тогда

$$\sum_{k=p+1}^{q+1} a_k := \sum_{k=p+1}^{q} a_k + a_{q+1}.$$

Индекс $k$ в обозначениях $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $\sum\limits_{k=p+1}^{q} a_k$ можно заменить любой *свободной буквой*: например, выражения $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ означают одно и то же. Суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $\sum\limits_{k=p+1}^{q} a_k$ часто записывают в виде $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и соотв. $a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q$.

Аналогично определяются произведения $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $\prod\limits_{k=p+1}^{q} a_k$ конечных семейств вещественных чисел. Эти произведения часто записывают в виде $a_1 a_2 \ldots a_n$ и соотв. $a_p a_{p+1} \ldots a_q$.

8.2. Свойства сумм и произведений конечных семейств чисел.

(а) *Если* $p, q \in \mathbb{Z}, p < q,$ *и* $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_q \in \mathbb{R},$ *то*

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k = \sum_{k=1}^{q-p} a_{p+k}, \quad \prod_{k=p+1}^{q} a_k = \prod_{k=1}^{q-p} a_{p+k}. \tag{1}$$

(б) (Ассоциативность) *Если* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n} \in \mathbb{R},$ *то*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{m+k} = \sum_{k=1}^{m+n} a_k, \quad \left(\prod_{k=1}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} a_{m+k}\right) = \prod_{k=1}^{m+n} a_k. \tag{2}$$

(в) (Коммутативность) *Сумма* $n$ *слагаемых не зависит от порядка следования слагаемых. Произведение* $n$ *сомножителей не зависит от порядка следования сомножителей.*

(г) *Если* $n \in \mathbb{N},$ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R},$ *то*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k), \quad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) = \prod_{k=1}^{n} (a_k b_k). \tag{3}$$

(д) *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$ *и каждой паре индексов* $i, j \in \mathbb{N},$ *где* $1 \leqslant i \leqslant m$ *и* $1 \leqslant j \leqslant n,$ *сопоставлено число* $a_{ij} \in \mathbb{R}.$ *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \quad \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij}. \tag{4}$$

(е) *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $a \in \mathbb{R}$, *то* $na = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, *где все* $a_k = a$.

(ж) (Дистрибутивность) *Если* $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* $b \in \mathbb{R}$, *то*

$$b\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} b a_k.$$

(з) (Обобщенная дистрибутивность) *Если* $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, *то*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{m} b_i\Big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_k b_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_k b_i.$$

(и) *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Произведение* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *отлично от нуля тогда и только тогда, когда все* $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$, *и в этом случае справедливо равенство* $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\Big)^{-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-1}$.

(к) *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *то* $\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\Big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.

(л) *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *то* $\Big|\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\Big| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.

Доказательства. (а) Фиксируем $p \in \mathbb{Z}$ и докажем равенство

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k = \sum_{k=1}^{q-p} a_{p+k} \tag{1*}$$

индукцией по $q \in \mathbb{Z}$, $q > p$. При $q = p+1$ обе суммы данного равенства равны своему единственному слагаемому $a_{p+1}$.

Пусть теперь $q \in \mathbb{Z}$, $q > p$, и для него равенство (1*) верно. Надо доказать, что тогда $\sum\limits_{k=p+1}^{q+1} a_k = \sum\limits_{k=1}^{q+1-p} a_{p+k}$. Применяя определение левой суммы, равенство (1*) и определение правой суммы, имеем:

$$\sum_{k=p+1}^{q+1} a_k = \sum_{k=p+1}^{q} a_k + a_{q+1} = \sum_{k=1}^{q-p} a_{p+k} + a_{q+1} = \sum_{k=1}^{q+1-p} a_{p+k}.$$

Согласно теореме 6.3 первое из равенств (1) доказано. Второе доказывается аналогично.

(б) Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и докажем равенство

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{m+k} = \sum_{k=1}^{m+n} a_k, \tag{2*}$$

индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n=1$ это равенство доказывается просто:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{1} a_{m+k} = \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} a_k.$$

Допустим, что $n \in \mathbb{N}$ произвольно и для любых $a_1, a_2, \dots, a_m$, $a_{m+1}, \dots, a_{m+n} \in \mathbb{R}$ справедливо равенство (2*). Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{n+1} a_{m+k} = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{m+k} + a_{m+n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m+n} a_k + a_{m+n+1} = \sum_{k=1}^{m+n+1} a_k.$$

Согласно теореме 6.3 первое из равенств (2), доказано. Второе доказывается аналогично.

(в) Пусть сумма $\sum_{i=1}^{n} a_{m_i}$ возникла из суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k$ в результате перестановки слагаемых, т.е. $\{1, 2, \dots, n\} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Надо доказать, что справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_{m_i} = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{*}$$

При $n=1$ доказывать нечего, так как при наличии только одного слагаемого перестановка идентична исходной сумме. Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ произвольно и для любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ справедливо равенство (*). Рассмотрим сумму $\sum_{k=1}^{n+1} a_k$ и ее перестановку $\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i}$. Надо доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k. \tag{**}$$

По определению правой суммы $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$. По определению перестановки каждое слагаемое левой суммы в (**) участвует и только один раз в качестве слагаемого правой суммы. Поэтому найдется единственное $j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant n+1$, такое, что $n+1 = m_j$.

Если $j = n+1$, то $a_{n+1} = a_{m_{n+1}}$ и

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{m_i} + a_{m_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} a_{m_i} + a_{n+1},$$

сумма $\sum_{i=1}^{n} a_{m_i}$ есть перестановка суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k$. По предположению индукции эти суммы совпадают. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{m_i} + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$

Пусть $j = 1$. Тогда $a_{n+1} = a_{m_1}$. По свойству (б)

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i} = a_{m_1} + \sum_{i=2}^{n+1} a_{m_i} = a_{n+1} + \sum_{i=2}^{n+1} a_{m_i}.$$

Сумма $\sum_{i=2}^{n+1} a_{m_i}$ есть перестановка суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k$. По предположению индукции эти суммы совпадают и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i} = a_{n+1} + \sum_{i=2}^{n+1} a_{m_i} = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$

Пусть $1 < j < n+1$. Тогда $1 \leqslant j-1$ и $j+1 \leqslant n+1$. Применяя свойство (б) и определение суммы $\sum_{i=1}^{j} a_{m_i}$, получим

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i} = \sum_{i=1}^{j} a_{m_i} + \sum_{i=j+1}^{n+1} a_{m_i} = \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{m_i} + a_{m_j}\right) + \sum_{i=j+1}^{n+1} a_{m_i} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{m_i} + \sum_{i=j+1}^{n+1} a_{m_i}\right) + a_{m_j} = \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{m_i} + \sum_{i=j+1}^{n+1} a_{m_i}\right) + a_{n+1}.$$

Преобразуем сумму в скобках. Обозначим

$$\mu_s = \begin{cases} m_s, & \text{если } 1 \leqslant s \leqslant j-1, \\ m_{s+1}, & \text{если } j \leqslant s \leqslant n. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_{m_i} + \sum_{i=j+1}^{n+1} a_{m_i} = \sum_{s=1}^{j-1} a_{\mu_s} + \sum_{s=j}^{n} a_{\mu_s} = \sum_{s=1}^{n} a_{\mu_s}$$

по свойству (б). Поскольку

$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{j-1}\} \cup \{\mu_j, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_n\} =$$
$$= \{m_1, m_2, \ldots, m_{j-1}\} \cup \{m_{j+1}, m_{j+2}, \ldots, m_{n+1}\} =$$
$$= \{m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}\} \setminus \{m_j\} =$$
$$= \{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{n+1\} = \{1, 2, \ldots, n\},$$

то сумма $\sum_{s=1}^{n} a_{\mu_s}$ есть перестановка суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k$. По предположению индукции эти суммы совпадают. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{m_i} = \left( \sum_{i=1}^{j-1} a_{m_i} + \sum_{i=j+1}^{n+1} a_{m_i} \right) + a_{n+1} = \sum_{s=1}^{n} a_{\mu_s} + a_{n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$

Таким образом, из равенства (*) следует равенство (**). Согласно принципу индукции равенство (*) верно всегда. Второе утверждение свойства (в) доказывается аналогично.

(г) Если $n = 1$, то

$$\sum_{k=1}^{1} a_k + \sum_{k=1}^{1} b_k = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^{1} (a_k + b_k).$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ произвольно и равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

справедливо для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k + \sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1} + b_{n+1} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)+(a_{n+1}+b_{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}(a_k+b_k).$$

Первое из равенств (3) доказано. Второе доказывается аналогично.

(д) Фиксируем $m$ и докажем первое из равенств (4) индукцией по $n\in\mathbb{N}$. При $n=1$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{1}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}a_{i1}=\sum_{j=1}^{1}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

по определению суммы из одного слагаемого.

Пусть теперь $n\in\mathbb{N}$ произвольно и равенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \tag{4*}$$

справедливо для любых чисел $a_{ij}\in\mathbb{R}$. Надо доказать, что тогда для любых чисел $a_{ij}\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}.$$

Применяя свойство (г) и равенство (4*), получим

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+a_{i,n+1}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+\sum_{i=1}^{m}a_{i,n+1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}+\sum_{i=1}^{m}a_{i,n+1}=\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}.$$

Индукция проведена и первое из равенств (4) доказано. Второе доказывается аналогично.

(е) При $n=1$ имеем $\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=a=1\cdot a$. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и для него $na=\sum_{k=1}^{n}a_k$. Тогда $\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}=na+a=(n+1)a$. По принципу индукции равенство (е) доказано.

(ж) При $n=1$ имеем $b\left(\sum_{k=1}^{1}a_k\right)=ba_1=\sum_{k=1}^{1}ba_k$. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и для него $b\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}ba_k$. Тогда по аксиоме (У5)

$$b\Bigl(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\Bigr) = b\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\Bigr) = b\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr) + ba_{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ba_k + ba_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} ba_k.$$

Индукция проведена и искомое равенство доказано.

(з) Применяя предыдущее свойство при $b = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и при $b = b_i$, получим:

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{i=1}^{m} b_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{m}\Bigl[\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\cdot b_i\Bigr] = \sum_{i=1}^{m}\Bigl[b_i\cdot\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigr] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_i a_k\Bigr) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_i a_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_k b_i.$$

(и) При $n = 1$ доказывать нечего.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть для него утверждение справедливо. Пусть, далее, $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$. По определению произведения

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}.$$

По свойству 1.4(а) правая часть этого равенства $\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\prod_{k=1}^{n} a_k \neq 0$ и $a_{n+1} \neq 0$. Поскольку для данного $n \in \mathbb{N}$ утверждение верно, то $\prod_{k=1}^{n} a_k \neq 0$ тогда и только тогда, когда все $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$. Отсюда ясно, что $\prod_{k=1}^{n+1} a_k \neq 0$ тогда и только тогда, когда все $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \neq 0$.

Пусть теперь все $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \neq 0$. Поскольку для $n \in \mathbb{N}$ утверждение верно, то $\Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr)^{-1} = \prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}$. Применяя еще свойство 1.3(е) и предыдущее равенство, получим

$$\Bigl(\prod_{k=1}^{n+1} a_k\Bigr)^{-1} = \Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}\Bigr)^{-1} = \Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr)^{-1}\cdot a_{n+1}^{-1} = \prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}\cdot a_{n+1}^{-1} = \prod_{k=1}^{n+1} a_k^{-1}.$$

Индукция проведена и утверждение (и) доказано.

(к) При $n=1$ доказывать нечего. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и для него

$$\Bigl|\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Тогда по свойству 2.7(д)

$$\Bigl|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\Bigr| = \Bigl|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\Bigr| \leqslant \Bigl|\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr| + |a_{n+1}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|.$$

Искомое неравенство доказано.

(л) При $n=1$ доказывать нечего. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и для него

$$\Bigl|\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Тогда по свойству 2.7(в)

$$\Bigl|\prod_{k=1}^{n+1} a_k\Bigr| = \Bigl|\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}\Bigr| = \Bigl|\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr| \cdot |a_{n+1}| = \prod_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |a_{n+1}| = \prod_{k=1}^{n+1} |a_k|.$$

Утверждение (л) доказано. ◊

8.3. Замечание. В разделе 8.1 мы определили смысл суммы $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k$ при $p,q\in\mathbb{Z},\ p\leqslant q$. Но иногда естественным образом возникают суммы вида $\sum\limits_{k=p}^{p-1} a_k$ и, в частности, $\sum\limits_{k=1}^{0} a_k$ (см. ниже бином Ньютона при $n=1$). *Естественно считать, что такая сумма имеет* 0 *слагаемых и сама равна* 0. Аналогичное произведение $\prod\limits_{k=p}^{p-1} a_k$ надо считать равным 1. При таком соглашении соответствующие расширения свойств 8.2(а–и) остаются справедливыми.

Но если объявить, что $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k = 0$ и $\prod\limits_{k=p}^{q} a_k = 1$ всякий раз, когда $p,q\in\mathbb{Z}$ и $q<p-1$, то свойства 8.2(б,е) будут не верны.

## §9. Степень с целым показателем

9.1. Определение. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Произведение $a_1a_2\ldots a_n$, где все $a_k=a\in\mathbb{R}$, обозначают $a^n$ и называют $n$-*й степенью числа* $a$. Если $a\neq 0$, то полагают еще $a^0=1$ и $a^m=\dfrac{1}{a^{-m}}$ для всех $m\in-\mathbb{N}$.

В частности, $a^1=a$, $a^2=aa$, $a^3=aaa=a^2a$, $\ldots$, $a^n=aa^{n-1},\ldots$ и $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$, $a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$, $a^{-3}=\dfrac{1}{a^3}$, $\ldots$ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, $\ldots$.

Числа $a\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{Z}$ называются *основанием* и соотв. *показателем степени* $a^n$.

9.2. Замечание. Выражение $a^{-1}$ для $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ оказалось двусмысленным. С одной стороны это число, обратное к $a$, и в этом смысле $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ по определению дроби. С другой стороны это степень числа $a$ с показателем $-1$ и в этом смысле $a^{-1}=\dfrac{1}{a^1}$. Но $a=a^1$ и поэтому обратное число $a^{-1}$ совпадает со степенью $a^{-1}$.

9.3. Свойства степени с целым показателем.

(а) *Если* $n\in\mathbb{N}$, *то* $0^n=0$. *В случае* $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ *выражение* $0^n$ *не имеет смысла*.

(б) $1^n=1$ *для всех* $n\in\mathbb{Z}$.

(в) *Если* $a\neq 0$, *то* $a^n\neq 0$ *для любого* $n\in\mathbb{Z}$.

(г) *Если* $a\neq 0$, *то* $a^na^m=a^{n+m}$ *для любых* $n,m\in\mathbb{Z}$.

(д) *Если* $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *то* $(ab)^n=a^nb^n$ *для любого* $n\in\mathbb{Z}$.

(е) *Если* $a\neq 0$, *то* $\left(a^n\right)^{-1}=a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n$ *для любого* $n\in\mathbb{Z}$.

(ж) *Если* $a\neq 0$, *то* $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$ *для любых* $n,m\in\mathbb{Z}$.

(з) *Если* $a\neq 0$ *и* $b\neq 0$, *то* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ *для любого* $n\in\mathbb{Z}$.

(и) *Если* $a \neq 0$, *то* $|a|^n = |a^n|$ *для любого* $n \in \mathbb{Z}$.

(к) *Если* $a \neq 0$, *то* $a^{m_1} a^{m_2} \ldots a^{m_n} = a^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$ *для любого конечного семейства целых чисел* $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$.

(л) *Если* $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *– конечное семейство вещественных чисел, отличных от* $0$, *то* $(a_1 a_2 \ldots a_m)^n = a_1^n a_2^n \ldots a_m^n$ *для любого* $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательства. (а) По свойству 8.2(и) произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$ равно $0$, если хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно $0$. Отсюда ясно, что $0^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

По свойству 1.4(б) на нуль делить нельзя. Поэтому $0^n$ при $n \in -\mathbb{N}$ не имеет смысла. Степень $0^0$ у нас также не определена ($0^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a^0 = 1$ для всех $a \neq 0$; спрашивается, чему должно равняться $0^n$?).

(б) Для $n \in \mathbb{N}$ равенство $1^n = 1$ вытекает из определения степени с показателем $n \in \mathbb{N}$, произведения конечного семейства чисел и из определения элемента *1* в аксиоме (У3). Равенство $1^0 = 1$ вытекает из определения $a^0$ при $a \neq 0$.

Для $n = -\nu \in -\mathbb{N}$ по предыдущему абзацу и по свойству 1.3(а) также имеем: $1^n = \frac{1}{1^\nu} = \frac{1}{1} = 1^{-1} = 1$.

(в) Пусть $a \neq 0$. Если $n \in \mathbb{N}$, то $a^n \neq 0$ по свойству 8.2(и).

Если $n = 0$, то $a^n = a^0 = 1 \neq 0$. Если $n \in -\mathbb{N}$, т.е. $n = -\nu$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$, то $a^\nu \neq 0$ по предыдущему абзацу. Следовательно, $a^n = \frac{1}{a^\nu} = (a^\nu)^{-1} \neq 0$ по свойству 1.4(г).

(г) Пусть $a \neq 0$. Если $n, m \in \mathbb{N}$, то по свойству 8.2(б)

$$a^n a^m = \prod_{k=1}^{n} a \cdot \prod_{k=1}^{m} a = \prod_{k=1}^{n+m} a = a^{n+m}.$$

Если $n=0$ и $m\in\mathbb{Z}$, то

$$a^n a^m = a^0 a^m = 1\cdot a^m = a^m = a^{0+m} = a^{n+m}.$$

Случай $n\in\mathbb{Z}$, $m=0$ аналогичен предыдущему.

Пусть $n,m\in-\mathbb{N}$, т.е. $-n=\nu\in\mathbb{N}$ и $-m=\mu\in\mathbb{N}$. По доказанному выше $a^\nu a^\mu = a^{\nu+\mu}$. Применяя свойства 1.5(б) и 1.2(ж), получим

$$a^n a^m = \frac{1}{a^\nu}\frac{1}{a^\mu} = \frac{1}{a^\nu a^\mu} = \frac{1}{a^{\nu+\mu}} = a^{-(\nu+\mu)} = a^{-\nu-\mu} = a^{n+m}.$$

Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $m=-\mu\in-\mathbb{N}$. Тогда $-m=\mu\in\mathbb{N}$. Если $n=\mu$, то

$$a^n a^m = a^n a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0 = a^{n-n} = a^{n+m}$$

по свойству 1.5(а). Если $n>\mu$, то $n-\mu\in\mathbb{N}$ по свойству 5.4(г) и $a^n = a^{n-\mu}a^\mu$ по доказанному выше; отсюда по свойствам 1.5(з,а)

$$a^n a^m = a^n\frac{1}{a^\mu} = \frac{a^n}{a^\mu} = \frac{a^{n-\mu}a^\mu}{a^\mu} = a^{n-\mu}\frac{a^\mu}{a^\mu} = a^{n-\mu} = a^{n+m}.$$

Если $n<\mu$, то $\mu-n\in\mathbb{N}$, $a^\mu = a^{\mu-n}a^n$ и по свойствам 1.5(з,д)

$$a^n a^m = \frac{a^n}{a^\mu} = \frac{a^n}{a^{\mu-n}a^n} = \frac{1}{a^{\mu-n}} = a^{-(\mu-n)} = a^{n-\mu} = a^{n+m}.$$

(д) Пусть $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Тогда $ab\neq 0$ по свойству 1.4(в). Если $n\in\mathbb{N}$, то по свойству 8.2(г) $(ab)^n = \prod_{k=1}^{n}(ab) = \prod_{k=1}^{n}a\prod_{k=1}^{n}b = a^n b^n$.

Если $n=0$, то $(ab)^n = (ab)^0 = 1 = 1\cdot 1 = a^0 b^0 = a^n b^n$.

Если $n\in-\mathbb{N}$, т.е. $-n=\nu\in\mathbb{N}$, то по доказанному только что и по свойству 1.5(б) $(ab)^n = \dfrac{1}{(ab)^\nu} = \dfrac{1}{a^\nu b^\nu} = \dfrac{1}{a^\nu}\cdot\dfrac{1}{a^\nu} = a^n b^n$.

(е) Пусть $a\neq 0$ и $n\in\mathbb{Z}$. Используя замечание 9.2 и свойства (г) и 1.4(д), получим $\left(a^n\right)^{-1} = a^{n\cdot(-1)} = a^{-n} = a^{(-1)\cdot n} = \left(a^{-1}\right)^n$.

(ж) Пусть $a\neq 0$. Фиксируем $n\in\mathbb{N}$ и докажем, что $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ индукцией по $m\in\mathbb{N}$. При $m=1$ имеем: $\left(a^n\right)^m = a^n = a^{n\cdot 1} = a^{nm}$.

Пусть теперь $m \in \mathbb{N}$ и для него $(a^n)^m = a^{nm}$. Применяя определения степени и произведения, имеем

$$(a^n)^{m+1} = \prod_{k=1}^{m+1} a^n = \prod_{k=1}^{m} a^n \cdot a^n = (a^n)^m \cdot a^n = a^{nm} \cdot a^n.$$

Отсюда по свойству (г) и по аксиоме дистрибутивности

$$(a^n)^{m+1} = a^{nm} \cdot a^n = a^{nm+n} = a^{nm+n\cdot 1} = a^{n(m+1)}.$$

Для $n, m \in \mathbb{N}$ равенство $(a^n)^m = a^{nm}$ доказано.

Поскольку $a \neq 0$, то $a^n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ по свойству (в). Значит, число $(a^n)^m$ также определена и $\neq 0$ для любых $n, m \in \mathbb{Z}$.

Если $n = 0$ и $m \in \mathbb{Z}$, то по свойствам (б) и 1.4(а)

$$(a^n)^m = (a^0)^m = 1^m = 1 = a^0 = a^{0\cdot m} = a^{nm}.$$

Если $n \in \mathbb{Z}$ и $m = 0$, то $(a^n)^m = (a^n)^0 = 1 = a^0 = a^{n\cdot 0} = a^{nm}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $m \in -\mathbb{N}$, т.е. $m = -\mu$, где $\mu \in \mathbb{N}$. По доказанному выше $(a^n)^\mu = a^{n\mu}$. Используя еще свойство 1.4(е), получим

$$(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^\mu} = \frac{1}{a^{n\mu}} = a^{-(n\mu)} = a^{n(-\mu)} = a^{nm}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $n \in -\mathbb{N}$, т.е. $n = -\nu$, где $\nu \in \mathbb{N}$. По определению степени и дроби $a^n = \dfrac{1}{a^\nu} = (a^\nu)^{-1}$. Используя еще замечание 9.2, свойство (е), равенство $(a^\nu)^m = a^{\nu m}$, доказанное выше для $\nu, m \in \mathbb{N}$, а также определение дроби и свойство 1.4(е), получим

$$(a^n)^m = \left((a^\nu)^{-1}\right)^m = \left((a^\nu)^m\right)^{-1} = (a^{\nu m})^{-1} = \frac{1}{a^{\nu m}} =$$

$$= a^{-(\nu m)} = a^{(-\nu)m} = a^{nm}.$$

Пусть, наконец, $n, m \in -\mathbb{N}$, т.е. $n = -\nu$ и $m = -\mu$, где $\nu, \mu \in \mathbb{N}$. Тогда $(a^\nu)^\mu = a^{\nu\mu}$. Используя еще свойство (е) (дважды) и свойство 1.4(е), получим

$$(a^n)^m = (a^{-\nu})^m = \left((a^\nu)^{-1}\right)^m = (a^\nu)^{-m} = (a^\nu)^\mu = a^{\nu\mu} = a^{(-n)(-m)} = a^{nm}.$$

Свойство (ж) доказано.

(з) Пусть $a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Используя определение дроби, свойство (д), замечание 9.2 и свойство (е), получим

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(ab^{-1}\right)^n = a^n\left(b^{-1}\right)^n = a^n\left(b^n\right)^{-1} = \frac{a^n}{b^n}.$$

(и) Пусть $a \neq 0$. Если $n \in \mathbb{N}$, то равенство $|a|^n = \left|a^n\right|$ вытекает из свойства 8.2(л). По свойству 2.7(б) $|a| \neq 0$, так что $|a|^n$ имеет смысл и для $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. Если $n = 0$, то $|a|^n = |a|^0 = 1 = |1| = \left|a^0\right| = \left|a^n\right|$. Если $n \in -\mathbb{N}$, т.е. $-n = \nu \in \mathbb{N}$, то $|a|^\nu = \left|a^\nu\right|$, как уже отмечено выше, и по свойству 2.7(г) $|a|^n = \dfrac{1}{|a|^\nu} = \dfrac{1}{\left|a^\nu\right|} = \left|\dfrac{1}{a^\nu}\right| = \left|a^n\right|$.

(к) Пусть $a \neq 0$. При $n = 1$ обе части искомого равенства

$$a^{m_1}a^{m_2}\ldots a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_n} \qquad (*)$$

равны $a^{m_1}$ и доказывать нечего. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть равенство (*) выполнено. Тогда по свойству (г)

$$a^{m_1}a^{m_2}\ldots a^{m_n}a^{m_{n+1}} = \left(a^{m_1}a^{m_2}\ldots a^{m_n}\right)\cdot a^{m_{n+1}} =$$
$$= a^{m_1+m_2+\ldots+m_n}\cdot a^{m_{n+1}} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_n+m_{n+1}}.$$

Индукция проведена и искомое равенство (*) доказано.

(л) Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Докажем равенство

$$\left(a_1a_2\ldots a_m\right)^n = a_1^n a_2^n \ldots a_m^n \qquad (*)$$

индукцией по $m \in \mathbb{N}$. При $m = 1$ обе части этого равенства равны $a_1^n$ и доказывать нечего. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и пусть для него справедливо равенство (*). Тогда по свойству (д)

$$\left(a_1a_2\ldots a_m a_{m+1}\right)^n = \left(\left(a_1a_2\ldots a_m\right)\cdot a_{m+1}\right)^n = \left(a_1a_2\ldots a_m\right)^n\cdot a_{m+1}^n =$$
$$= \left(a_1^n a_2^n\ldots a_m^n\right)\cdot a_{m+1}^n = a_1^n a_2^n \ldots a_m^n a_{m+1}^n.$$

Индукция проведена и равенство (*) доказано. ◊

## §10. Примеры применения математической индукции

10.1. Пример 1. *Для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \equiv 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1). \tag{1}$$

Доказательство. Докажем это равенство индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n=1$ равенство (1) имеет вид $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ и справедливо.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ произвольно и пусть для него равенство (1) выполняется. Докажем, что тогда это равенство верно и при $n+1$, т.е. справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \tag{2}$$

Используя равенство (1), имеем:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n+1}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Таким образом, равенство (1) верно для $n=1$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ из равенства (1) вытекает равенство (2). Согласно принципу индукции 5.3 равенство (1) справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$. ◊

10.2. Пример 2. Если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 3$, то $n^2 \leqslant 2^n$.

Доказательство. При $n = 1, 2, 4$ неравенство верно. Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 4$. Допустим, что для этого $n$ неравенство $n^2 \leqslant 2^n$ справедливо. Надо показать, что тогда $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Из $n \geqslant 4$ следует $2 \leqslant n-2$. Отсюда и из $n^2 \leqslant 2^n$ имеем:

$$(n+1)^2 \;=\; n^2 + 2n + 1 \;\leqslant\; 2^n + 2n + 1 \;\leqslant\; 2^n + (n-2)n + 1 \;=$$
$$=\; 2^n + n^2 - 2n + 1 \;<\; 2^n + n^2 \;\leqslant\; 2^n + 2^n \;=\; 2^{n+1}.$$

Искомое неравенство доказано. ◊

10.3. Пример 3. Неравенство Бернулли. *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \geqslant -1$, *то*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x \geqslant -1$. При $n=1$ неравенство (1) имеет вид $1+x \geqslant 1+x$ и справедливо. Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ и пусть для него неравенство (1) справедливо. Надо доказать, что тогда

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x. \tag{2}$$

Используя неравенства (1) и $x \geqslant -1$, т.е. $1+x \geqslant 0$, имеем

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) =$$
$$= 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.$$

Согласно теореме 5.3 неравенство (2) доказано для всех $n \in \mathbb{N}$. ◊

В качестве еще одного примера на метод математической индукции докажем формулу для вычисления степени $(a+b)^n$, именуемую *биномом Ньютона*.

10.3. Определение. Введем обозначения $0!=1$, $1!=1$, $2!=1\cdot 2$, $\ldots$, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, $\ldots$. Ясно, что $n!=n(n-1)!=\prod\limits_{k=1}^{n} k$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Выражение $n!$ читается $n$*-факториал* (*эн-факториал*).

Обозначим еще

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{(n-k)!},$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \in \mathbb{Z}$. Число $C_n^k$ называется «*число сочетаний из* $n$ *по* $k$». Числа $C_n^k$ именуются также *биномиальными коэффициентами*.

10.4. Теорема (Бином Ньютона). *Для любых* $a,b \in \mathbb{R}$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\, a^{n-k} b^k + b^n. \tag{1}$$

Замечание. Обычно эту формулу записывают короче:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k. \tag{2}$$

Однако в случае $a=0$ или $b=0$ первое и соотв. последнее слагаемые суммы (2) содержат степени $0^0$ и не имеют смысла.

Доказательство. При $n=1$ равенство (1) имеет вид $a+b=a+b$ и справедливо. Пусть теперь $n\in\mathbb{N}$ произвольно. Допустим, что для него равенство (1) выполняется. Докажем, что оно верно и для следующего номера $n+1$, т.е.

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^{k}\,a^{n+1-k}b^{k}+b^{n+1}. \tag{3}$$

Используя равенство (1), имеем

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)\Big(a^{n}+\sum_{k=1}^{n-1}C_{n}^{k}\,a^{n-k}b^{k}+b^{n}\Big)=$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n-1}C_{n}^{k}\,a^{n+1-k}b^{k}+ab^{n}+a^{n}b+\sum_{j=1}^{n-1}C_{n}^{j}\,a^{n-j}b^{j+1}+b^{n+1}=$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n}^{k}\,a^{n+1-k}b^{k}+\sum_{j=0}^{n-1}C_{n}^{j}\,a^{n-j}b^{j+1}+b^{n+1}=$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n}^{k}\,a^{n+1-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{n}C_{n}^{k-1}\,a^{n-k+1}b^{k}+b^{n+1}=$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}\right)a^{n+1-k}b^{k}+b^{n+1}=$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^{k}\,a^{n+1-k}b^{k}+b^{n+1},$$

так как при $1\leqslant k\leqslant n$

$$C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=C_{n+1}^{k}.$$

Итак, равенство (1) верно при $n=1$ и, кроме того, для всякого $n\in\mathbb{N}$ из неравенства (1) вытекает неравенство (2). Согласно принципу индукции 5.3 равенство (1) справедливо для всех $n\in\mathbb{N}$. ◊

Приведем несколько частных случаев бинома Ньютона:

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2},$$

$$(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3},$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

## §11. Задачи на метод математической индукции

11.1. Доказать, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(2k+1)=\frac{n}{2}(n+1)^2(n+2)$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-2)(k-6)=\frac{n}{12}(n+1)(n-7)(3n-8)$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k-1)(3k-2)=\frac{n}{4}(n+1)(3n+1)(3n-2)$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k-1)(6k-1)=\frac{n}{2}(n+1)(3n-1)(3n+2)$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+2)(k+6)=\frac{n}{12}(n+1)(n+8)(3n+11)$;

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(3k+1)=\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(9n+7)$;

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+3)=\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+13)$;

(h) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)(3k-1)=\frac{n}{12}(n^2-1)(9n+2)$;

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+2)(k-4)=\frac{n}{4}(n+1)(n+4)(n+5)$;

(j) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)(k-3)=\frac{n}{12}(n^2-1)(3n-10)$;

(k) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-2)(k-4)=\frac{n}{4}(n+1)(n-3)(n-4)$;

(l) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$;

(m) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)=\frac{n}{4}(n^2-1)(n-2)$;

(n) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-3)(2k-3)=\frac{n}{2}(n+1)(n-3)(n-4)$;

(o) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+3)(2k+3)=\frac{n}{2}(n+1)(n+3)(n+4)$;

(p) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)(2k-1)=\frac{1}{2}n^2(n^2-1)$.

11.2. Доказать, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(6k^2-1)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2(2n-1)(2n+3)$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(5k^2+1)=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n+1)$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(2k^2+1)=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n+1)^2$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(4k^2-1)^2=\frac{1}{24}(4n^2-1)^2(2n+3)^2-\frac{3}{8}$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(k^2-1)=\frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n-1)(n+2)$;

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(20k^2+7)=\frac{n}{2}(n+1)(2n+1)^3$;

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(k^2+1)=\frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n^2+n+1)$;

(h) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^5(k^2+1)=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4$;

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(2k^2-11)=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n-5)(2n+7)$;

(j) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(3k^2+1)=\frac{1}{2}n^3(n+1)^3$;

(k) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k^2-1)=\frac{n}{10}(n+2)(n^2-1)(2n+1)$;

(l) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(3k^2-11)=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2(n-2)(n+3)$;

(m) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4(7k^2+5)=\frac{1}{2}n^3(n+1)^3(2n+1)$;

(n) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(k^2-13)=\frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n-4)(n+5)$;

(o) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k-1)^2(2k-1)=\frac{1}{3}n^2(n^2-1)^2$;

(p) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(k^2-1)^2=\frac{1}{8}n^2(n^2-1)^2(n+2)^2$.

11.3. Доказать, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства:

(a) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(k+1)(2k+1)=\frac{n}{2}(n+1)(15n^2+13n+2)$;

(b) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k^2(5k^2+1)=\frac{1}{2}n^2(2n+1)(31n^2+22n+3)$;

(c) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} (2k-1)(2k^2-2k+1)=15n^4$;

(d) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(8k^2+1)=\frac{n}{2}(2n+1)(3n+1)(10n+1)$;

(e) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(8k^2-3k+1)=3n^2(2n+1)(5n+1)$;

(f) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} (k+1)(28k^2-25k+8)=105n^3(n+1)$;

(g) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(16k^2-3k+2)=\frac{n}{2}(2n+1)(4n+1)(15n+1)$;

(h) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(k-1)(8k-1)=n(2n+1)(15n^2-4n-1)$;

(i) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(k+1)(4k-1)=3n^2(n+1)(5n+2)$;

(j) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(8k^2+3k+1)=n(2n+1)(15n^2+10n+1)$;

(k) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(k+1)(8k+1)=n(n+1)(2n+1)(15n+2)$;

(l) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(k-1)(2k-1)=\frac{3}{2}n^2(5n^2-1)$;

(m) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k(4k^2-3k+1)=n^3(15n+7)$;

(n) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} (k-2)(28k^2-31k+11)=105\,n^3(n-1)$;

(o) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} (k-1)(4k^2-5k+2)=n^3(15n-7)$;

(p) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} (k-1)(k-2)(4k-3)=3n^2(n-1)(5n-2)$.

11.4. Доказать, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k=2^n-1$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k=2+(n-1)2^{n+1}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}=2-\frac{n-2}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k!=(n+1)!-1$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k\cdot k!\cdot 2^k}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}-\frac{n!\cdot 2^{n-1}}{(2n+1)!}$.

11.5. Доказать, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)=\frac{n}{3}(n^2-1)$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k^2-1)=\frac{n}{3}(n+2)(2n-1)$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(k^2-a^2\right)=\frac{n}{6}\left(2n^2+3n-6a^2+1\right),\ \ \forall a\in\mathbb{R}$;

6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (a+k)^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+6a+1)+a^2(n+1),\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

11.6. Доказать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n}{30} (n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{30} n^2 (n+1)^2 (2n^2+2n+1)$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{p=0}^{m} (k+p) = \frac{1}{m+2} \prod\limits_{p=0}^{m+1} (n+p), \ \forall m \in \mathbb{N}$.

11.7. Доказать, что справедливы равенства:

1) $\prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$;

2) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;

3) $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{4}{7}\right)\left(1-\frac{6}{13}\right)\ldots\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right) = \frac{1}{n^2+n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;

4) $\left(1-\frac{3}{8}\right)\left(1-\frac{3}{15}\right)\left(1-\frac{3}{24}\right)\ldots\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right) = \frac{n+2}{4(n-1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$;

5) $\prod\limits_{k=1}^{n} (p+k)^k = [(p+n)!]^n \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(p+k-1)!}, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

11.8. Доказать, что $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ данные числа делятся на 5:

(a) $4^{4n+3}+1$, $16^{3n}+4$, $2\cdot 6^{2n+1}+3$, $4\cdot 31^{n+1}+1$;

(b) $3^{4n+1}+2$, $26^{n+2}+4$, $3\cdot 8^{4n}+2$, $7\cdot 14^{2n+1}+2$;

(c) $2^{8n+3}+7$, $7^{4n+2}+6$, $3\cdot 24^{2n}+2$, $4\cdot 11^{2n+1}+1$;

(d) $4^{6n+3}+1$, $9^{4n+1}+1$, $2\cdot 34^{2n}+3$, $3\cdot 16^{n+1}+2$;

(e) $6^{n+1}+4$, $14^{2n}+9$, $3\cdot 2^{4n+3}+1$, $3\cdot 41^{n+1}+2$;

(f) $11^{n+2}+4$, $7^{4n+3}+2$, $2\cdot 21^{2n}+3$, $2\cdot 3^{8n+3}+1$;

(g) $4^{2n+1}+1$, $19^{2n+1}+1$, $4\cdot 6^{n+2}+1$, $3\cdot 29^{2n}+2$;

(h) $9^{2n}+4$, $36^{n+1}+14$, $7\cdot 2^{8n+5}+1$, $9\cdot 16^{2n+1}+1$;

(i) $4^{4n+5}+1$, $21^{n+2}+4$, $4\cdot 3^{4n+3}+7$, $2\cdot 6^{4n+1}+3$;

(j) $7^{4n}+4$, $26^{n+2}+9$, $3\cdot 11^{2n}+2$, $2\cdot 16^{3n+1}+3$;

(k) $2^{4n+5}+3$, $51^{n+2}+4$, $4\cdot 6^{3n}+1$, $3\cdot 11^{3n+1}+2$;

(l) $4^{2n+3}+1$, $9^{4n+3}+1$, $3\cdot 36^{2n}+7$, $7\cdot 16^{n+2}+3$;

(m) $19^{2n}+4$, $2^{8n+1}+3$, $7\cdot 6^{2n+3}+8$, $2\cdot 31^{n+2}+3$;

(n) $3^{8n+1}+2$, $8^{4n+1}+7$, $9\cdot 39^{2n}+1$, $2\cdot 11^{n+2}+3$;

(o) $4^{6n+1}+1$, $46^{n+2}+4$, $3\cdot 16^{2n}+2$, $9\cdot 7^{4n+1}+2$;

(p) $11^{3n}+9$, $41^{n+2}+14$, $7\cdot 2^{4n+1}+1$, $6\cdot 9^{2n+3}+1$.

11.9. Доказать, что $\forall n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ числа $a_n, b_n, c_n, d_n$ делятся на 6, 7, 8 и 9 соотв.:

(a) $a_n=5^{2n+1}+1$, $b_n=2^{3n}+6$, $c_n=3^{2n}+7$, $d_n=2^{6n+5}+4$;

(b) $a_n=7^n+5$, $b_n=2\cdot 3^{6n}+5$, $c_n=5^{2n}+7$, $d_n=4^{3n+2}+2$;

(c) $a_n=11^{2n+1}+1$, $b_n=5\cdot 4^{3n}+2$, $c_n=7^{2n+1}+1$, $d_n=7^{3n+1}+2$;

(d) $a_n=13^n+5$, $b_n=5^{6n}+6$, $c_n=5\cdot 9^n+3$, $d_n=8^{2n+1}+1$;

(e) $a_n=17^{2n+1}+1$, $b_n=6^{2n}+6$, $c_n=3\cdot 11^{2n}+5$, $d_n=13^{3n+2}+2$;

(f) $a_n=19^n+5$, $b_n=2\cdot 8^n+5$, $c_n=7\cdot 13^{2n}+1$, $d_n=16^{3n}+8$;

(g) $a_n=23^{2n+1}+1$, $b_n=9^{3n}+6$, $c_n=15^{2n}+7$, $d_n=8\cdot 17^{2n}+1$;

(h) $a_n=25^n+5$, $b_n=11^{3n+1}+3$, $c_n=17^n+7$, $d_n=19^n+8$;

(i) $a_n=29^{2n+1}+1$, $b_n=13^{2n}+6$, $c_n=19^{2n+1}+5$, $d_n=22^{3n+1}+5$;

(j) $a_n=2\cdot 31^{4n}+4$, $b_n=15^n+13$, $c_n=21^{2n+1}+3$, $d_n=25^{3n}+8$;

(k) $a_n=4\cdot 35^{2n}+2$, $b_n=16^{3n}+6$, $c_n=23^{2n+1}+1$, $d_n=26^{2n+1}+1$;

(l) $a_n=37^n+11$, $b_n=18^{3n}+13$, $c_n=3\cdot 25^n+5$, $d_n=8\cdot 28^n+1$;

(m) $a_n=41^{2n+1}+1$, $b_n=20^{2n}+6$, $c_n=27^{2n}+7$, $d_n=35^{2n+1}+1$;

(n) $a_n=43^n+5$, $b_n=22^n+6$, $c_n=7\cdot 29^{2n}+1$, $d_n=8\cdot 37^n+1$;

(o) $a_n = 47^{2n+1}+1,\quad b_n = 27^{2n}+6,\quad c_n = 31^{2n+1}+1,\quad d_n = 44^{2n+1}+1$;

(p) $a_n = 49^n + 5\quad b_n = 29^n + 6,\quad c_n = 33^n + 7,\quad d_n = 5{\cdot}46^n + 4$.

11.10. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ числа $a_n$ и $b_n$ делятся на число $c_n$, если:

(a) $a_n = 18^{4n} - 1,\quad b_n = 987^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 17\cdot 19 = 4199$;

(b) $a_n = 186^{2n} - 1,\quad b_n = 628^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 17\cdot 37 = 6919$;

(c) $a_n = 12^{4n} - 1,\quad b_n = 1132^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 29 = 4147$;

(d) $a_n = 571^{2n} - 1,\quad b_n = 989^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 19 = 2717$;

(e) $a_n = 436^{2n} - 1,\quad b_n = 666^{2n} - 1,\quad c_n = 19\cdot 23\cdot 29 = 12673$;

(f) $a_n = 208^{2n} - 1,\quad b_n = 1310^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 19\cdot 23 = 4807$;

(g) $a_n = 443^{2n} - 1,\quad b_n = 38^{4n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 17\cdot 37 = 8177$;

(h) $a_n = 12^{6n} - 1,\quad b_n = 417^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 19 = 2717$;

(i) $a_n = 714^{2n} - 1,\quad b_n = 898^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 23\cdot 31 = 9269$;

(j) $a_n = 21^{4n} - 1,\quad b_n = 1002^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17 = 2431$;

(k) $a_n = 441^{2n} - 1,\quad b_n = 560^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17 = 2431$;

(l) $a_n = 324^{2n} - 1,\quad b_n = 664^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 17\cdot 19 = 4199$;

(m) $a_n = 298^{2n} - 1,\quad b_n = 1013^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 23 = 3289$;

(n) $a_n = 47^{4n} - 1,\quad b_n = 781^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 17\cdot 23 = 5083$;

(o) $a_n = 373^{2n} - 1,\quad b_n = 681^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 17\cdot 31 = 5797$;

(p) $a_n = 87^{3n} - 1,\quad b_n = 495^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 19\cdot 31 = 7657$;

11.11. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ числа $a_n$ и $b_n$ делятся на число $c_n$, если:

(a) $a_n = 8074^{2n} - 1,\quad b_n = 9385^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23 = 96577$;

(b) $a_n = 7162^{2n} - 1,\ b_n = 8152^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 19\cdot 31 = 84227$;

(c) $a_n = 4181^{2n} - 1,\ b_n = 9349^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 17\cdot 19\cdot 41 = 145673$;

(d) $a_n = 2872^{2n} - 1,\ b_n = 5422^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17\cdot 29 = 70499$;

(e) $a_n = 6291^{2n} - 1,\ b_n = 6733^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17\cdot 37 = 89947$;

(f) $a_n = 7734^{2n} - 1,\ b_n = 8722^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19 = 46189$;

(g) $a_n = 4003^{2n} - 1,\ b_n = 9569^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 23\cdot 29 = 95381$;

(h) $a_n = 4863^{2n} - 1,\ b_n = 562^{3n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19 = 46189$;

(i) $a_n = 5796^{2n} - 1,\ b_n = 6478^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 17\cdot 19\cdot 31 = 110143$;

(j) $a_n = 4302^{2n} - 1,\ b_n = 5864^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17\cdot 23 = 55913$;

(k) $a_n = 2092^{2n} - 1,\ b_n = 5864^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 17\cdot 23\cdot 41 = 208403$;

(l) $a_n = 628^{2n} - 1,\ b_n = 7105^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 17\cdot 19\cdot 37 = 131461$;

(m) $a_n = 2991^{2n} - 1,\ b_n = 7292^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 17\cdot 23 = 55913$;

(n) $a_n = 987^{2n} - 1,\ b_n = 4523^{2n} - 1,\quad c_n = 13\cdot 17\cdot 19\cdot 29 = 121771$;

(o) $a_n = 7734^{2n} - 1,\ b_n = 9140^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37 = 100529$;

(p) $a_n = 7162^{2n} - 1,\ b_n = 8150^{2n} - 1,\quad c_n = 11\cdot 13\cdot 19\cdot 29 = 78793$.

11.12. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P_n(x) = x^{n+1} + (x+1)^{2n-1},\quad Q(x) = x^2 + x + 1$;

2) $P_n(x) = x^{2n+1} + (x-1)^{n+2},\quad Q(x) = x^2 - x + 1$;

3) $P_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1,\quad Q(x) = (x-1)^2$;

4) $P_n(x) = x^{2n} - nx^{n-1}(x^2-1) - 1,\quad Q(x) = (x-1)^3$.

**П.К. РАШЕВСКИЙ**

# *О ДОГМАТЕ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА*

Целые числа создал господь бог,
остальное – дело рук человеческих.
Л. Кронекер

Конечно, никто в настоящее время не воспринимает слова Л. Кронекера в буквальном смысле, да вряд ли понимал их буквально и он сам. Но если прочесть их в надлежащей транскрипции, то они, пожалуй, выражают в некотором смысле господствующее умонастроение математиков до нашего времени включительно.

Этим я хочу сказать, что натуральный ряд и сейчас является единственной математической идеализацией процессов реального счёта. Это монопольное положение осеняет его ореолом некой истины в последней инстанции, абсолютной, единственно возможной, обращение к которой неизбежно во всех случаях, когда математик работает с пересчётом своих объектов. Более того, так как физик использует лишь тот аппарат, который предлагает ему математика, то абсолютная власть натурального ряда распространяется и на физику и – через посредство числовой прямой – предопределяет в значительной степени возможности физических теорий.

Быть может, положение с натуральным рядом в настоящее время имеет смысл сравнить с положением евклидовой геометрии в XVIII веке, когда она была единственной геометрической теорией, а потому считалась некой абсолютной истиной, одинаково обязательной и для математиков и для физиков. Считалось само собой понятным, что физическое пространство должно идеально точно подчиняться евклидовой геометрии (а чему же ещё?). Подобно этому мы считаем сейчас, что пересчет как угодно больших материальных совокупностей, измерение как угодно больших расстояний в физическом пространстве и т.п. должны подчиняться существующим схемам натурального ряда и числовой прямой (а чему же ещё?).

Разница лишь в том, что на первый вопрос в скобках дало ответ развитие науки в XIX–XX веке (неевклидова геометрия, а позже теория относительности), а на второй, как мне кажется, ответ предстоит еще дать.

Я хорошо понимаю, что те соображения на эту тему, которые меня давно занимают, ориентировочны и бездоказательны, но все же, в порядке постановки вопроса, решаюсь их высказать.

Процесс реального счета физических предметов в достаточно простых случаях доводится до конца, приводит к однозначно определенному итогу (число присутствующих в зале, например). Именно эту ситуацию берёт за основу теория натурального ряда и в идеализированном виде распространяет её “до бесконечности”. Грубо говоря, совокупности большие предполагаются в каком-то смысле столь же доступными пересчету, как и малые и со столь же однозначным итогом, хотя бы реально этот пересчет и был не осуществим. В этом смысле наше представление о натуральном ряде похоже на зрительное восприятие панорамы, скажем, панорамы какого-либо исторического сражения. На первом плане на реальной земле расположены реальные предметы: разбитые пушки, расщепленные деревья и т.п.; затем все это незаметно переходит в раскрашенный холст с точным расчетом на обман даже очень внимательного глаза.

В рамках математической теории подобная идеализация процесса счета, разумеется, вполне законна. Но ввиду единственности теории эта точка зрения автоматически навязывается и физике; однако здесь вопрос поворачивается по-другому. В самом деле, пусть мы хотим узнать, сколько молекул газа заключено в данном сосуде. Должны ли мы искать ответ в виде совершенно точно определенного целого числа? Оставим в стороне вопрос о ненужности такой “точности” для физики, не будем останавливаться и на фактической трудности задачи. Гораздо более важной для нас является ее принципиальная неосуществимость: молекулы газа взаимодействуют со стенками сосуда, испытывают различные превращения и т.п., а потому наша задача просто не имеет определенного смысла. Физик вполне удовлетворяется – в этом и в аналогичных случаях – достаточно хорошим приближенным ответом. Из этого примитивного примера можно усмотреть некоторый намек. А именно, можно думать, что математик предлагает физику не совсем то самое, что тому нужно. Духу физики более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобретали бы в каком то смысле “размытый вид”, а не являлись строго определенными членами натурального ряда, как мы это себе представляем. Существующая теория, так сказать, переуточнена: добавление единицы меняет число – а что меняет для физика добавление одной молекулы в сосуд с газом? Если мы согласимся принять эти соображения хотя бы за отдаленный намек на возможность математической теории нового типа, то в ней прежде всего пришлось бы отказаться от идеи, что любой член натурального ряда получается последовательным насчитыванием единиц – идеи, которая буквально, конечно, не формулируется в существующей теории, но косвенно провоцируется принципом математической индукции. Вероятно, для “очень больших” чисел присчитывание единицы вообще не должно их менять (возражение, что присчитывая единицы, можно “присчитать” и любое число, не котируется в силу только что сказанного выше).

Разумеется, “числа” этой гипотетической теории были бы объектами другой природы, чем числа натурального ряда. Можно предполагать, что почти совпадение имело бы место лишь для начальных отрезков существующего и гипотетического натуральных рядов, а по мере удаления по ним различие их структуры должно возрастать; в гипотетическом натуральном ряде началось бы нечто вроде “принципиального сбивания со счёта”, и он (ряд) всё более “размываясь”, приобретал бы в каком-то смысле черты непрерывной структуры числовой прямой. Можно догадываться даже, что математическая индукция при этом приняла бы своеобразные черты – промежуточные между индукцией обычной и, например, интегрированием дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ (здесь как бы вместо перехода $n \to n+1$ мы применяем переход $x \to x+dx$).

Быть может, имеет смысл сделать и такое замечание. В современных космологических теориях само собой подразумевается, что сколь угодно большие космические протяжённости должны описываться на основе существующих математических представлений о натуральном ряде и числовой прямой. Но так ли это очевидно? Вспомним, что ещё в 1900-х годах физики обсуждали вопрос о геометрической форме электрона. Считалось вполне осмысленным предположение, что электрон по своей геометрии отличается от бильярдного шарика лишь очень малыми размерами. Другими словами, считалось, что наши геометрические представления полностью применимы к объектам микромира; только последующее появление и развитие квантовой механики показало абсурдность этой “очевидной” точки зрения.

Не следует ли ожидать, что в области очень больших протяжённостей нас ещё ждут сюрпризы, подобно встретившимся в области протяжённостей очень малых (но, конечно, сюрпризы совсем другого стиля)? И не исключено, что описание ситуации потребует существенно иных конструкций в самом математическом фундаменте, т.е. наших представлениях об очень больших числах.

Впрочем, возможно, что нам даже не придётся углубляться в космос для проверки того, насколько очень большие материальные совокупности на самом деле подчиняются счёту на основе теории натурального ряда. Возможно, что какое-нибудь из следующих поколений ЭВМ достигнет столь гигантских возможностей в смысле количества производимых операций, что соответствующие эксперименты станут реальными.

Ещё одно замечание в сторону. Знаменитые отрицательные результаты Гёделя 30-х годов в своём фундаменте исходят из убеждения: сколько бы ни продолжать построение метаматематических формул для данной (полностью формализованной) математической теории, принципы пересчета и упорядочения формул остаются обычными, т.е. подчинёнными схеме натурального ряда. Разумеется, это убеждение даже не оговаривалось, – настолько оно считалось очевидным.

Между тем построение метаматематических формул – это реальный физический процесс, производимый человеком или, как стало возможным в последнее время, машиной.

Если мы откажемся от догмата, что натуральный ряд идеально приспособлен для описания любых сколь угодно больших материальных совокупностей, то становятся сомнительными и результаты Гёделя; точнее, их придётся рассматривать, возможно, как утверждения, относящиеся не к реальному развитию данной формализованной математической теории, а к условному, идеализированному её развитию, когда при пересчёте формул, сколько бы их ни было, и при описании их структуры, сколь громоздка ни была она, мы считаем законным применять схему натурального ряда. На это дополнительное условие, в сущности, и опирается тонкая игра Гёделя с двойным, математическим и метаматематическим, толкованием некоторых сконструированных им соотношений. Не успокаивает и финитность конструкций Гёделя: при полной расшифровке сокращений (что в данном контексте является принципиальным) его конструкции становятся чрезвычайно сложными, явно не выписываются, и сомнения, высказанные раньше насчёт поведения “очень больших” совокупностей, напрашиваются и здесь.

Наша гипотетическая реформа числового ряда должна, конечно, сопровождаться соответствующей реформой и числовой прямой; как уже упоминалось, реформированный натуральный ряд в своих удалённых областях как бы станет походить на (реформированную) числовую прямую. И эта “реформированная” числовая прямая должна отличаться от обычной тоже некоторой размытостью своих элементов: сколь угодно точные рациональные приближения вещественных чисел возможны именно потому, что мы пользуемся обычным натуральным рядом, элементы которого определены абсолютно точно, сколь далеко мы ни зашли бы. Но если при удалении по натуральному ряду возникает возрастающая размытость его элементов, она передаётся и дробям с большими знаменателями, и мы доходим до оптимальной возможной точности в оценке (реформированных) вещественных чисел, может быть, раньше, чем знаменатель успеет “устремиться к бесконечности”.

Если здесь снова вспомнить о физике, то нам придётся как бы повторить сказанное ранее, но под другим углом зрения. Вещественное число имеет в физике смысл результата измерения. Разумеется, любое измерение производится лишь с какой-то степенью точности, и та “идеальная точность”, которую предлагает математика в понятии вещественного числа, физику не требуется. Однако до сих пор не существует иного способа создания физических теорий с математическим аппаратом. Что это: неизбежное, роковое обстоятельство или “просто” результат несуществования математической теории, о которой здесь идёт речь и в которой идея “приближённости” будет заложена органически; в которой “точное” будет в то же время означать в каком-то смысле “оптимально приближённое”.

Если бы такая теория стала реальностью, то можно было бы думать о новой трактовке дуализма волна-частица в квантовой механике и даже мечтать об автоматическом исчезновении расходимостей релятивисткой квантовой механики, после того как точки пространства-времени утратят свою резкую определённость и приобретут чуть-чуть размытый вид.

Не следует ожидать, что наша гипотетическая теория, если ей когда-нибудь суждено появиться на свет, будет единственной; наоборот, она должна будет зависеть от каких-то “параметров” (по своей роли отдалённо напоминающих радиус пространства Лобачевского, когда мы отказываемся от евклидовой геометрии в пользу неевклидовой). Можно ожидать, что в предельном случае гипотетическая теория должна будет совпадать с существующей.

Построение подобной теории (если вообще верить в его возможность) будет очень трудным, но не совсем в том смысле, как бывают трудны математические проблемы типа: доказать или опровергнуть данное утверждение. Видимо, сама её логическая структура должна сильно отклоняться от общепринятых схем. Для примера: в обычной математической теории считается, что любой объект, участвуя в конструкции другого объекта, сам от этого не меняется, и тем более не исчезает. Так, сопоставляя числам $a$, $b$ их сумму $a+b$, мы в тоже время сохраняем в своём распоряжении и прежние числа. Заметим, что этот принцип, общепринятый в математике, несколько парадоксален с точки зрения материальных прообразов математических операций. Так, "сложив" два мешка зерна путём ссыпания их в третий мешок. Мы получаем "сумму", но безвозвратно теряем "слагаемые". Восстановить же их мы можем лишь приближённо. Возможно, и в нашей гипотетической теории придётся принять, что участие объекта в конструировании другого объекта некоторым образом влияет на первый объект, вызывает в нём какие-то изменения, это не нужно, конечно, понимать как определённое предложение; я хочу лишь пояснить, какого рода могло бы быть серьёзное отклонение логической структуры от обычной.

Возможен и другой вариант сказанного. Обычную точку зрения можно трактовать так: любой объект существует в неограниченном количестве абсолютно одинаковых копий, и когда одна из них "истрачена" на конструкцию другого объекта, остаётся сколько угодно других, возможно, в нашей гипотетической теории придётся отказаться от абсолютной одинаковости "копий" и принять, что они "изготавливаются" в пределах некоторых "допусков". Кстати, это хорошо соответствует идее "размытости" объектов теории, о чём говорилось ранее.

Заканчивая эту заметку, я понимаю, конечно, что ничего не доказал, да и не пытался что-либо доказать. Я хотел только привлечь внимание к проблематике, которую смог обрисовать – это также нужно признать – лишь весьма туманно. Но обрисовать её более ясно – это уже означало бы продвинуться и в её решении.

Мне неизвестны какие-либо печатные материалы по затронутой теме, но в устной передаче я слышал, что о ней думали; по-видимому, в чём-то родственные соображения относительно натурального ряда высказывал в своё время Н.Н. Лузин.

Поступило в редакцию 6 октября 1972 г.
Статья печатается в дискуссионном порядке (*прим. ред.*).

## О математике

Мы уверены в вашем серьезном интересе к математике, и предоставляем вам возможность ознакомиться со своеобразной поэмой о математике, каждая часть которой пронизана любовью к “царице наук” и преклонением перед её могуществом. Собранные воедино, эти статьи помогут вам почувствовать стройную красоту математики, её проблемы и значимость для других наук.

Одна статья принадлежит перу француза Николя Бурбаки, одного из самых влиятельных математиков 20-го века. Эта статья, имеющая программный характер, стала началом осуществления грандиозного замысла по аксиоматизации всех основных математических дисциплин по состоянию на середину 20-го века. Осуществляя его, Н. Бурбаки выпустил в свет 35 томов под названием “Элементы математики”, из которых 21 том переведен на русский язык (см. Приложение № 4). К сожалению, в ноябре 1968 года Бурбаки объявил о своей “кончине”, и издание осталось незаконченным.

Николя Бурбаки – псевдоним группы крупных французских математиков, в основном, питомцев Высшей нормальной школы. Принято считать годом рождения группы 1933 год. Авторы затрачивали массу труда на составление каждого тома. Известны случаи, когда создавалось 6–7 вариантов текста и от начала работы над текстом до появления его в книжных магазинах порой проходило 8–12 лет. Состав группы (от 10 до 20 членов) менялся со временем, но стиль и дух работы оставался неизменным. Никаких формальных правил для членства в группе не было, кроме одного: отставка в 50 лет.

Более подробно о том, как возникла идея создания группы, о её целях и организации работы вы узнаете, прочитав речь “Дело Николя Бурбаки”, произнесенную одним из организаторов группы Жаном Дьёдонне в октябре 1968 года (сборник статей “Очерки о математике”. – М.: Знание, 1973).

Статья “Архитектура математики”, с которой мы предлагаем вам познакомиться, взята из книги [1] (см. Приложение № 6). В помещенный здесь текст внесены незначительные сокращения, что отмечено значком $\langle\cdots\rangle$.

Автор другой статьи Юджин Поль Вигнер (Eugene P. Wigner) – американский физик венгерского происхождения, работавший с 1930 г. в США. Вигнер одним из первых показал эффективность применения к квантовой механике аппарата теории групп. Участвовал в работе группы Энрико Ферми, построившей в 1942 г. первый ядерный реактор. За большой вклад в теорию ятомного ядра и элементарных частиц, особенно за применение фундаментальных принципов симметрии, Вигнеру была присуждена в 1963 г. Нобелевская премия по физике. Юджин Вигнер 11 мая 1959 г. прочитал доклад “Непостижимая эффективность математики в естественных науках” в Нью-Йоркском университете на Курантовских математических лекциях. Доклад опубликован в журнале: Comm. Pure and Appl. Math.. 1960. V. 13, № 1. Русский перевод статьи, предлагаемой вашему вниманию, опубликован в книге: Е. Вигнер, “Этюды о симметрии”, под редакцией Я.А. Смородинского. Москва: Мир, 1971.

**Н. БУРБАКИ**

# *АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ*

Перевод с французского Д.Н. Ленского

## Одна математика или несколько математик?

Дать в настоящее время общее представление о математической науке – значит заняться таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала. В соответствии с общей тенденцией в науке с конца XIX в. число математиков и число работ, посвященных математике, значительно возросло. Статьи по чистой математике, публикуемые во всем мире в среднем в течение одного года, охватывают многие тысячи страниц. Не все они имеют, конечно, одинаковую ценность; тем не менее, после очистки от неизбежных отбросов оказывается, что каждый год математическая наука обогащается массой новых результатов, приобретает все более разнообразное содержание и постоянно дает ответвления в виде теорий, которые беспрестанно видоизменяются, перестраиваются, сопоставляются и комбинируются друг с другом. Ни один математик не в состоянии проследить это развитие во всех подробностях, даже если он посвятит этому всю свою деятельность. Многие из математиков устраиваются в каком-либо закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение.

Поэтому даже не возникает мысли дать неспециалисту точное представление о том, что даже сами математики не могут постичь во всей полноте. Но можно спросить себя, является ли это обширное разрастание развитием крепко сложенного организма, который с каждым днем приобретает все больше и больше согласованности и единства между своими вновь возникающими частями, или, напротив, оно является только внешним признаком тенденции к идущему все дальше и дальше распаду, обусловленному самой природой математики; не находится ли эта последняя на пути превращения в Вавилонскую башню, в скопление автономных дисциплин, изолированных друг от друга как по своим методам, так и по своим целям и даже по языку? Одним словом, существуют в настоящее время одна математика или несколько математик?

Хотя в данный момент этот вопрос особенно актуален, ни в коем случае не надо думать, что он нов; его ставили с первых же шагов математической науки. Ведь действительно, если даже не принимать в расчет прикладной математики, между геометрией и арифметикой (по крайней мере, в их элементарных разделах) существует очевидная разница в происхождении, поскольку последняя вначале была наукой о дискретном, а первая – наукой о непрерывной протяженности (два аспекта, которые были коренным образом противопоставлены друг другу после открытия иррациональностей). Именно это открытие оказалось роковым для первой попытки унификации нашей науки – арифметизации пифагорейцев ("все вещи суть числа").

Мы бы зашли слишком далеко, если бы от нас потребовали проследить те превратности судьбы, которым подвергалась унитарная концепция математики от пифагорейцев до наших дней. Кроме того, это – работа, к которой более подготовлен философ, чем математик, так как общей чертой всех попыток объединить в единое целое математические дисциплины все равно, идет ли речь о Платоне, о Декарте или Лейбнице, об арифметизации или логистике XIX в., – является то, что они делались в связи с какой-либо более или менее претенциозной философской системой, причем исходным пунктом для них всегда служили априорные воззрения на отношения между математикой и двойной действительностью внешнего мира и мира мысли. $\langle\cdots\rangle$ [1]. Наша задача более скромна и более точно очерчена; мы намереваемся остаться внутри математики и искать ответ на поставленный вопрос, анализируя ее собственное развитие.

### Логический формализм и аксиоматический метод

После более или менее очевидного банкротства различных систем, на которые мы указывали выше, в начале этого века, казалось, почти полностью отказались от взгляда на математику как на науку, характеризуемую единым предметом и единым методом; скорее наблюдалась тенденция рассматривать ее как "ряд дисциплин, основывающихся на частных, точно определенных понятиях, связанных тысячью нитей" [1], которые позволяют методам, присущим одной из дисциплин, оплодотворять одну или несколько других. В настоящее время, напротив, мы думаем, что внутренняя эволюция математической науки вопреки видимости более чем когда-либо упрочила единство ее различных частей и создала своего рода центральное ядро, которое является гораздо более связным целым, чем когда бы то ни было. Существенное в этой эволюции заключается в систематизации отношений, существующих между различными математическими теориями; ее итогом явилось направление, которое обычно называют “аксиоматическим методом”.

Иногда говорят также “формализм” или “формалистический метод”; но необходимо с самого начала остерегаться путаницы, которую вызывают эти недостаточно четко определенные слова и которая и без того часто используется противниками аксиоматического метода. Каждому известно, что внешней отличительной чертой математики является то, что она представляется нам той “длинной цепью рассуждений”, о которой говорил Декарт. Каждая математическая теория является цепочкой высказываний, которые выводятся друг из друга согласно правилам логики, во всем существенном совпадающей с логикой, известной со времен Аристотеля под названием “формальной логики”, соответствующим образом приспособленной к специфическим потребностям математики. Таким образом, утверждение, что “дедуктивное рассуждение” является для математики объединяющим началом, – тривиальная истина. Но столь поверхностное замечание не может, конечно, служить объяснением единства различных математических теорий, точно так же, как нельзя, например, объединить в единой науке физику и биологию под предлогом, что и та, и другая используют экспериментальный метод. Способ рассуждения, заключающийся в построении цепочки силлогизмов, является только трансформирующим механизмом, который можно применять независимо от того, каковы посылки, к которым он применяется, и который, следовательно, не может характеризовать природу этих последних. Другими словами, это лишь внешняя форма, которую математик придает своей мысли, орудие, делающее ее способной объединяться с другими мыслями[1], и, так сказать, язык, присущий математике, но не более того. Упорядочить словарь этого языка и уточнить его синтаксис – это значит сделать очень полезное дело, эта работа и составляет действительно одну из сторон аксиоматического

---

[1] Каждый математик, впрочем, знает, что доказательство не является понятным в подлинном смысле этого слова, если ограничиться лишь проверкой правильности выводов, которые его составляют, и не пытаться понять отчетливо идеи, которые привели к созданию этой цепочки выводов предпочтительно перед всякой другой.

метода, а именно ту, которую следует назвать логическим формализмом (или, как еще говорят, “логистикой”). Но – и мы настаиваем на этом – *это только одна сторона* и при том наименее интересная.

То, что аксиоматика ставит перед собой в качестве основной цели – уразумение существа математики, именно этого не может дать логический формализм, взятый сам по себе. Точно так же, как экспериментальный метод исходит из априорной уверенности в постоянстве законов природы, аксиоматический метод берет за точку опоры убеждение в том, что если математика не является нанизыванием силлогизмов в направлении, избранном наугад, то она тем более не является более или менее хитрым искусством, состоящим из произвольных сближений, в котором господствует одна техническая ловкость. Там, где поверхностный наблюдатель видит лишь две или несколько теорий, совершенно отличных друг от друга по своему внешнему виду, и где вмешательство гениального математика приводит к обнаружению совершенно “неожиданной помощи” [1], которую одна из них может оказать другой, там аксиоматический метод учит нас искать глубокие причины этого открытия, находить общие идеи, скрывающиеся за деталями, присущими каждой из рассматриваемых теорий, извлекать эти идеи и подвергать их исследованию.

## Понятие “структуры”

Какую форму приобретает этот метод? Именно здесь аксиоматика больше всего сближается с экспериментальным методом. Черпая из картезианского источника, она “разделяет трудности, чтобы лучше их разрешить”. В доказательствах какой-либо теории она стремится разъединить главные пружины фигурирующих там рассуждений; затем, беря каждое из соответствующих положений *изолированно* и возводя его в общий принцип, она выводит из них следствия; наконец, возвращаясь к изученной теории, она снова *комбинирует* предварительно выделенные составные элементы и изучает, как они взаимодействуют между собой. Конечно, нет ничего нового в этом классическом сочетании анализа и синтеза; вся оригинальность этого метода заключается в том, как его применяют.

Чтобы проиллюстрировать примером только что описанный метод, мы рассмотрим наиболее старую (и наиболее простую) аксиоматическую теорию – теорию абстрактных групп. Рассмотрим следующие три операции: 1° *сложение действительных чисел*, при котором сумма двух действительных чисел (положительных, отрицательных и нуля) определена обычным образом; 2° *умножение целых чисел по простому модулю* $p$, причем элементами, которые мы рассматриваем, являются числа 1, 2, 3, …, $p$-1, а произведением двух таких чисел является, по определению, остаток от деления на $p$ их произведения в обычном смысле; 3° “*композицию*” *перемещений* в евклидовом трехмерном пространстве, причем результатом этой композиции (или произведением) двух перемещений $T$ и $S$ (взятых в данном порядке) мы будем считать, по определению, перемещение, полученное в результате выполнения сначала перемещения $T$, а затем $S$. В каждой из этих трех теорий двум элементам $x$ и $y$, взятым в данном порядке, рассматриваемого множества (в первом случае множества всех действительных чисел, во втором – множества чисел 1, 2, 3, ..., $p$-1, в третьем – множества всех перемещений) ставится в соответствие (с помощью особой для каждого множества процедуры) третий однозначно определенный элемент того же множества, который мы условимся во всех трех случаях символически обозначать $x\tau y$ (это будет сумма, если $x$ и $y$ – действительные числа; их произведение по модулю $p$, если они – натуральные числа $\leq p-1$; результат их композиции, если они являются перемещениями). Если теперь рассмотреть свойства этой “операции” в каждой из трех теорий, то обнаружится замечательный параллелизм; внутри же каждой из этих теорий эти свойства зависят друг от друга, и анализ логических связей между ними приводит к выделению небольшого числа тех свойств, которые являются независимыми (т.е. таких, что ни одно из них не является логическим следствием остальных). Можно, например[2], взять три следующих свойства, которые мы выразим с помощью наших символических обозначений, но которые, конечно, легко перевести на язык каждой из этих теорий:

*a*) каковы бы ни были элементы $x, y, z$, имеем $(x\tau y)\tau z = x\tau(y\tau z)$ (ассоциативность операции $x\tau y$);

*b*) существует элемент $e$ такой, что для всякого элемента $x$ $e\tau x = x\tau e = x$ (для сложения действительных чисел – число 0, для умножения по модулю $p$ – число 1, для композиции перемещений –

---

[2] Этот выбор не является единственно возможным, и известны различные системы аксиом, эквивалентных рассматриваемой, причем аксиомы каждой системы являются логическими следствиями аксиом любой другой системы.

«тождественное перемещение», которое оставляет на своем месте каждую точку пространства);

*c*) для каждого элемента *x* существует элемент $x'$, такой, что $x\tau x' = x'\tau x = e$ (для сложения действительных чисел – противоположное число $-x$, для композиции перемещений – обратное перемещение, т. е. такое, которое каждую точку, перемещенную смещением *x*, возвращает в исходное положение; для умножения по модулю *p* существование $x'$ следует из очень простого арифметического рассуждения[3].

Тогда мы устанавливаем, что те свойства, которые при помощи общих обозначений возможно выразить одним и тем же образом в каждой из этих трех теорий, являются следствием трех предыдущих. Например, поставим перед собой цель доказать, что из $x\tau y = x\tau z$ следует $y = z$. Можно было бы это сделать в каждой из этих теорий, используя рассуждения, специфические для данной теории. Но можно избрать следующий образ действий, который применим ко всем трем случаям. Из соотношения $x\tau y = x\tau z$ мы выводим равенство $x'\tau(x\tau y) = x'\tau(x\tau z)$ ($x'$ имеет смысл, определенный выше). Далее, применяя *a*), получим $(x'\tau x)\tau y = (x'\tau x)\tau z$. Используя *c*), запишем это соотношение в виде $e\tau y = e\tau z$, и, наконец, применяя *b*), получаем $y = z$, что и требовалось доказать. В этом рассуждении мы полностью абстрагировались от природы элементов $x, y, z$, т. е. нам незачем было знать, являются ли они действительными числами, натуральными числами $\leq p-1$ или перемещениями. Единственная посылка, которой мы пользовались, заключалась в том, что операция $x\tau y$ над элементами $x, y$ удовлетворяет свойствам *a*), *b*), *c*). Для того чтобы избежать скучных повторений, приходят, таким образом, к мысли, что удобно раз и навсегда вывести логические следствия из этих трех единственных свойств. Необходимо, конечно, для удобства речи принять общую терминологию. Говорят, что множество, на котором определена операция $x\tau y$, характеризуемая тремя свойствами

---

[3] Заметим, что остатки от деления на *p* чисел $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ не могут быть все различными. Приравняв два из них друг другу, легко показать, что степень $x^{k-l}\,(k > l)$ от *x* имеет остаток, равный 1. Если $x'$ является остатком от деления $x^{p-l-1}$ на *p*, то произведение $xx'$ по модулю *p* равно 1.

*a*), *b*) и *c*), снабжено *структурой группы* (или, более коротко, является *группой*). Условия *a*), *b*), *c*) называются аксиомами группы[4], и вывести из них их следствия – значит построить аксиоматическую теорию групп.

Теперь можно объяснить, что надо понимать в общем случае под *математической структурой*. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых $\langle\cdots\rangle$ не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы $\langle\cdots$или его подмножества$\cdots\rangle$ $\langle\cdots\rangle$; затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются аксиомами рассматриваемой структуры)$\langle\cdots\rangle$. Построить аксиоматическую теорию данной структуры – это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, *отказавшись от каких-либо других предположений* относительно рассматриваемых элементов (в частности от всяких гипотез относительно их “природы”).

## Основные типы структур

Отношения, являющиеся исходной точкой в определении структуры, могут быть по своей природе весьма разнообразными. То отношение, которое фигурирует в групповых структурах, называют “законом композиции”; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры являются “законами композиции”, соответствующая структура называется алгебраической структурой (например, структура поля определяется двумя законами композиции с надлежащим образом выбранными аксиомами: сложение и умножение действительных чисел определяют структуру поля на множестве этих чисел).

Другой важный тип представляют собой структуры, определенные отношением порядка; на этот раз это – отношение между двумя элементами $x, y$, которое чаще всего мы выражаем словами “$x$ меньше или равно $y$” и которое мы будем обозначать в общем случае $xRy$. Здесь больше не предполагается, что это отношение однозначно определяет один из элементов $x, y$ как

[4] Разумеется, этот смысл слова “аксиома” не имеет ничего общего с общепринятым смыслом выражения, “очевидная истина”.

функцию другого. Аксиомы, которым оно подчиняется, таковы: $a$) для всех $x$ $xRx$; $b$) из соотношений $xRy$, $yRx$ следует $x = y$; $c$) из соотношений $xRy$, $yRz$ следует $xRz$. Очевидным примером множества, снабженного такой структурой, является множество целых чисел (или множество действительных чисел), причем здесь знак $R$ заменяется на $\leq$. Но надо заметить, что мы не включили в число аксиом аксиому, отражающую следующее свойство, которое кажется неотделимым от того понятия порядка, каким мы пользуемся в обыденной жизни: "каковы бы ни были $x, y$ имеет место или $xRy$ или $yRx$". Другими словами, не исключается случай, когда два элемента могут оказаться *несравнимыми*. На первый взгляд это может показаться странным, но легко привести очень важные примеры структур порядка, для которых имеет место именно это обстоятельство. Именно с таким положением вещей мы сталкиваемся, когда $X, Y$ означают подмножества некоторого множества, а $XRY$ означает "$X$ содержится в $Y$", или когда $x, y$ являются натуральными числами, а $xRy$ означает "$x$ делит $y$", или, наконец, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются действительными функциями, определенными на интервале $a \leq x \leq b$, а $f(x)Rg(x)$ означает: "каково бы ни было $x$ $f(x) \leq g(x)$". Эти примеры в то же время показывают, сколь велико разнообразие областей, где появляются структуры порядка, и заранее дают представление о том, насколько интересно их изучение.

Мы скажем еще несколько слов о третьем важном типе структур – *топологических структурах* (или *топологиях*); в них находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия *окрестности*, *предела* и *непрерывности*, к которым нас приводит наше представление о пространстве.

Для перехода к абстракции, находящей свое выражение в аксиомах такой структуры, требуются усилия, значительно большие тех, которые имели место в предыдущих примерах $\langle \cdots \rangle$.

## Стандартизация математических орудий

Мы думаем, что нами сказано достаточно для того, чтобы читатель мог создать себе достаточно ясное представление об аксиоматическом методе. Наиболее бросающейся в глаза его чертой, как это видно из изложенного выше, является реализация значительной *экономии мысли*. “Структуры” являются *орудиями* математика; каждый раз, когда он замечает, что между изучаемыми им элементами имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он должен был бы мучительно трудиться, выковывая сам средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему, причем их мощность зависела бы от его личного таланта и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы. ⟨···⟩

Но это сравнение – недостаточное. Математик не работает подобно машине; мы должны особенно подчеркнуть, что в рассуждениях математика основную роль играет особая *интуиция*[5], отличная от обыденной чувственной интуиции и заключающаяся скорее в непосредственном угадывании (предшествующем всякому рассуждению) нормального положения вещей, которое, как кажется, он вправе ожидать от математических объектов, ставших в результате его частого оперирования с ними столь же для него привычными, как и объекты реального мира. Но ведь каждая структура сохраняет в своем языке интуитивные отзвуки той специфической теории, откуда ее извлек аксиоматический анализ, описанный нами выше. И когда исследователь неожиданно открывает эту структуру в изученных им явлениях, это для него является как бы толчком, который сразу направляет интуитивный поток его мыслей в неожиданном направлении, и в результате этого математический ландшафт, по которому он движется, получает новое освещение. Чтобы ограничиться старым примером, вспомним прогресс, осуществленный в начале XIX в. благодаря геометрической интерпретации мнимых величин; с нашей точки зрения, это было обнаружение во множестве комплексных чисел хорошо известной топологической структуры – структуры евклидовой плоскости – со всеми следующими отсюда возможностями приложений, – открытие, которое в руках Гаусса, Абеля, Коши и Римана менее чем за одно столетие обновило весь анализ.

Такие примеры умножились за последние 50 лет: пространство Гильберта и более общие функциональные пространства, вводящие топологические структуры в множества, элементами которых

---

[5] Интуиция, которая, впрочем, часто ошибается (как и всякая интуиция).

являются уже не точки, а функции; *p*-адические числа Гензеля, посредством которых – еще более удивительное обстоятельство! – топология воцарилась в той области, которая до этих пор считалась царством дискретного, разрывного по преимуществу – в множестве целых чисел; мера Хаара, безгранично расширившая область применения понятия интеграла и способствовавшая весьма глубокому анализу свойств непрерывных групп, – таковы решающие моменты в прогрессе математики, т. е. повороты, когда свет гения определял новое направление теории, обнаруживая в ней структуру, которая, как казалось *a priori*, не играла там никакой роли.

Это говорит о том, что в настоящее время математика менее чем когда-либо сводится к чисто механической игре с изолированными формулами, более чем когда-либо интуиция безраздельно господствует в генезисе открытий; но теперь и в дальнейшем в ее распоряжении находятся могущественные рычаги, предоставленные ей теорией наиболее важных структур, и она окидывает единым взглядом унифицированные аксиоматикой огромные области, в которых некогда, как казалось, царил самый бесформенный хаос.

## Обзор в целом

Руководствуясь концепцией аксиоматики, попытаемся представить теперь математический мир в целом. Конечно, мы более не распознаем здесь традиционный порядок, который, подобно первым классификациям видов животных, ограничивался тем, что расставлял рядом друг с другом теории, представляющие наибольшее внешнее сходство. Вместо точно разграниченных разделов алгебры, анализа, теории чисел и геометрии мы увидим, например, теорию простых чисел по соседству с теорией алгебраических кривых или евклидову геометрию рядом с интегральными уравнениями, и упорядочивающим принципом будет концепция *иерархии структур*, идущей от простого к сложному, от общего к частному.

В центре находятся основные типы структур, из которых мы только что перечислили главнейшие, так сказать, *порождающие структуры*. В каждом из этих типов господствует уже достаточное разнообразие, так как там надо различать наиболее общую структуру рассматриваемого типа с наименьшим числом аксиом и структуры, которые получаются из нее в результате ее обогащения дополнительными аксиомами, каждая из которых влечет за собой и новые следствия. Именно таким образом теория групп, помимо тех общих положений, которые справедливы для всех групп и зависят только от аксиом, перечисленных выше, содержит, в частности, теорию конечных групп (в которой добавляют аксиому, гласящую, что число элементов группы конечно), теорию абелевых групп (в которых имеем $x\tau y = y\tau x$ каковы бы ни были $x, y$), а также теорию *конечных абелевых групп* (в которой предполагаются выполненными обе вышеуказанные аксиомы). Точно так же среди *упорядоченных* множеств различают те, в которых (как при упорядоченности во множестве целых или во множестве действительных чисел) любые два элемента сравнимы и которые называются *линейно упорядоченными*; среди этих последних особо изучают множества, называемые вполне упорядоченными (в которых, так же как в множестве натуральных чисел, каждое подмножество имеет "наименьший элемент"). Подобная же градация существует и для топологических структур.

За пределами этого первоначального ядра появляются структуры, которые можно было бы назвать *сложными* и в которые входят одновременно одна или несколько порождающих структур, но не просто совмещенные друг с другом (что не дало бы ничего нового), а органически *скомбинированные* при помощи одной или нескольких связывающих их аксиом. Именно такой характер носит *топологическая алгебра*, изучающая структуры, определяемые одним или несколькими законами композиций и одной топологией, которые связаны тем условием, что алгебраические операции являются непрерывными функциями (для рассматриваемой топологии) элементов, над которыми они производятся. Не менее важной является *алгебраическая топология*, которая рассматривает некоторые множества точек пространства, определенные топологическими свойствами (симплексы, циклы и т. д.), как элементы, над которыми производятся алгебраические операции. Соединение структуры порядка и алгебраической структуры точно так же изобилует результатами, приводя, с одной стороны, к теории делимости идеалов, а с другой стороны – к теории интегрирования и к "спектральной теории" операторов, где точно так же топология играет свою роль.

Наконец, далее начинаются собственно частные теории, в которых элементы рассматриваемых множеств, которые до сего момента в общих структурах были совершенно неопределенными, получают более определенную индивидуальность. Именно таким образом получают теории классической математики: анализ функций действительной и комплексной переменной, дифференциальную геометрию, алгебраическую геометрию, теорию чисел. Но они теряют свою былую автономность и являются теперь перекрестками, на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие более общий характер.

Чтобы сохранить правильную перспективу, необходимо после этого беглого обзора сейчас же добавить, что он должен рассматриваться как весьма грубое приближение к истинному положению дел в математике. Он является одновременно схематическим, идеализированным и застывшим.

С х е м а т и ч е с к и м – так как в деталях не все идет так гладко и планомерно, как это может представиться после того, что мы рассказали. Между прочим, имеются неожиданные возвращения назад, когда теория, носящая ярко выраженный частный характер, как, например, теория действительных чисел, оказывает помощь, без которой нельзя обойтись при построении какой-либо общей теории, как, например, топологии или теории интегрирования.

И д е а л и з и р о в а н н ы м – потому что далеко не во всех разделах математики некоторая определенная часть каждой из основных структур распознана и вмещена в четко очерченные границы. В некоторых теориях (например, в теории чисел) существуют многочисленные изолированные результаты, которые до сего времени не умеют ни классифицировать, ни связать удовлетворительным образом с известными структурами.

Наконец, з а с т ы в ш и м, так как нет ничего более чуждого аксиоматическому методу, чем статическая концепция науки, и мы не хотели оставить у читателя впечатление, будто бы мы претендовали дать очерк ее окончательного состояния. Структуры не остаются неизменными ни по их числу, ни по их сущности; вполне возможно, что дальнейшее развитие математики приведет к увеличению числа фундаментальных структур; открыв плодотворность введения новых аксиом или новых сочетаний аксиом. Можно заранее оценить значение этих открытий, если судить о них по тем, которые дали уже известные структуры. С другой стороны, последние ни в коем случае не являются чем-то законченным, и было бы весьма удивительно, если бы их жизненная сила была уже исчерпана.

Введя эти неизбежные поправки, можно лучше понять внутреннюю жизнь математики, понять то, что создает ее единство и вносит в нее разнообразие, понять этот большой город, чьи предместья не перестают разрастаться несколько хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более и более ясному плану и стремясь к все более и более величественному расположению, в то время как старые кварталы с их лабиринтом переулков сносятся для того, чтобы проложить к окраине улицы все более прямые, все более широкие, все более удобные.

**Возвращение к прошлому и заключение**

Концепция, которую мы только что пытались изложить, возникла не сразу, а лишь в результате более чем полувековой эволюции и была встречена не без сопротивления, как со стороны философов, так и со стороны математиков. Многие из этих последних долго не могли согласиться рассматривать аксиоматику как что-либо большее, чем ненужные тонкости логиков, не способные оплодотворить какую-либо теорию. Эта критика объясняется, без сомнения, исторической случайностью: аксиоматизации, которые появились первыми и которые имели наибольший отклик (аксиоматизации арифметики Дедекинда и Пеано, евклидовой геометрии Гильберта), касались унивалентных теорий, т.е. таких, которые полностью определялись совокупностью своих аксиом, причем система этих аксиом не могла быть применена к какой-либо другой теории, кроме той, из которой она была извлечена (в противоположность тому, что мы видели, например, в теории групп). Если бы это имело место для всех структур, то упрек в бесплодности, выдвинутый по адресу аксиоматического метода, был бы полностью оправдан $\langle\cdots\rangle$. Но этот метод доказал свою мощь своим развитием, и отвращение к нему, которое еще встречается там и сям, можно объяснить лишь тем, что разум по естественной причине затрудняется допустить мысль, что в конкретной задаче может оказаться плодотворной форма интуиции, отличная от той, которая непосредственно подсказывается данными (и которая возникает в связи с абстракцией более высокого порядка и более трудной).

Что касается возражений со стороны философов, то они относятся к области, где мы не решаемся всерьез выступать из-за отсутствия компетентности; основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического $\langle\cdots\rangle$. То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, – это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда и не узнаем. Во всяком случае, сделанное замечание могло бы побудить философов в будущем быть более благоразумными при решении этого вопроса. Перед тем как началось революционное развитие современной физики, было потрачено немало труда из-за желания во что бы то ни стало заставить математику рождаться из экспериментальных истин; но, с одной стороны, квантовая физика показала, что эта “макроскопическая” интуиция действительности скрывает “микроскопические” явления совсем другой природы, причем для их изучения требуются такие разделы математики, которые, наверное, не были изобретены с целью приложений к экспериментальным наукам, а с другой стороны, аксиоматический метод показал, что “истины”, из которых хотели сделать средоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые отнюдь не ограничивают свое применение этим частным случаем. В конце концов, это интимное взаимопроникновение, гармонической необходимостью которого мы только что восхищались, представляется не более чем случайным контактом наук, связи между которыми являются гораздо более скрытыми, чем это казалось *a priori*.

В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм. Конечно, нельзя отрицать, что большинство этих форм имело при своем возникновении вполне определенное интуитивное содержание; но как раз сознательно лишая их этого содержания, им сумели придать всю их действенность, которая и составляет их силу, и сделали для них возможным приобрести новые интерпретации и полностью выполнить свою роль в обработке данных.

Только имея в виду этот смысл слова “форма”, можно говорить о том, что аксиоматический метод является “формализмом”. Единство, которое он доставляет математике, это – не каркас формальной логики, не единство, которое дает скелет, жизни. Это – питательный сок организма в полном развитии, податливый и плодотворный инструмент исследования, который сознательно используют в своей работе, начиная с Гаусса, все великие мыслители-математики, все те, кто, следуя формуле Лежена-Дирихле, всегда стремились “*вычисления* заменить *идеями*”.

Литература: [1] Brunschvig L., Les etapes de la philosophie mathematique, Paris, Alcana, 1912.

**ЮДЖИН П. ВИГНЕР**

# *НЕПОСТИЖИМАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ*

Перевод с английского Ю.А. Данилова

## Непостижимая эффективность математики в естественных науках

“…по-видимому, здесь есть какая-то тайна, которую нам еще предстоит раскрыть”

Ч.С. Пирс

Рассказывают такую историю. Встретились как-то раз два приятеля, знавшие друг друга еще со студенческой скамьи, и разговорились о том, кто чем занимается. Один из приятелей стал статистиком и работал в области прогнозирования изменения численности населения. Оттиск одной из своих работ статистик показал бывшему соученику. Начиналась работа, как обычно, с гауссова распределения. Статистик растолковал своему приятелю смысл используемых в работе обозначений для истинных показателей народонаселения, для средних и т.д. Приятель был немного недоверчив и отнюдь не был уверен в том, что статистик его не разыгрывает.

– Откуда тебе известно, что все обстоит именно так, а не иначе? – спросил он. – А это что за символ?

– Ах, это, – ответил статистик. – Это число $\pi$.

– А что оно означает?

– Отношение длины окружности к ее диаметру.

– Ну, знаешь, говори, да не заговаривайся, – обиделся приятель статистика. – Какое отношение имеет численность народонаселения к длине окружности?

Наивность восприятия друга нашего статистика вызывает у нас улыбку. Тем не менее, когда я услышал эту историю, меня не покидало смутное беспокойство, ибо реакция приятеля была не чем иным, как проявлением здравого смысла. Еще большее замешательство я испытал через несколько дней, когда один из моих студентов выразил удивление по поводу того, что для проверки своих теорий мы отбираем лишь крайне незначительное число данных[6].

“Представим себе, – сказал студент, – что мы хотим создать теорию, пригодную для описания явлений, которыми мы до сих пор пренебрегали, и непригодную для описания явлений, которые казались нам имеющими первостепенное значение. Можем ли мы заранее утверждать, что построить такую теорию, имеющую мало общего с существующей ныне, но тем не менее позволяющую объяснять столь же

[6] Речь идет о замечании Вернера, в то время студента Принстонского университета.

широкий круг явлений, нельзя?” Я вынужден был признать, что особенно убедительных доводов, исключающих существование такой теории, нет.

Две рассказанные истории служат иллюстрациями двух главных тем моего доклада. Первой – о том, что между математическими понятиями подчас возникают совершенно неожиданные связи и что именно эти связи позволяют нам удивительно точно и адекватно описывать различные явления природы. Второй – о том, что в силу последнего обстоятельства (поскольку мы не понимаем причин, делающих математические понятия столь эффективными) мы не можем утверждать, является ли теория, сформулированная на языке этих понятий, единственно возможной. Мы находимся в положении, несколько аналогичном положению человека, держащего в руках связку ключей и пытающегося открыть одну за другой несколько дверей. Рано или поздно ему всегда удается подобрать ключ к очередной двери, но сомнения относительно взаимно однозначного соответствия между ключами и дверями у него остаются.

Большая часть того, что будет здесь сказано, не отличается новизной; в той или иной форме аналогичные идеи, по-видимому, приходили в голову многим ученым. Моя основная цель заключается в том, чтобы рассмотреть эти идеи с нескольких сторон. Во-первых, обратить внимание на чрезвычайную эффективность математики в естественных науках как на нечто загадочное, не поддающееся рациональному объяснению. Во-вторых, показать, что именно эта сверхъестественная эффективность математических понятий поднимает вопрос о единственности физических теорий. Для обоснования тезиса о непостижимо важной роли, которую математика играет в физике, я постараюсь кратко ответить на вопросы: что такое математика и что такое физика? Затем мы рассмотрим, каким образом математика входит в физические теории и, наконец, – почему успехи математики в физике кажутся нам столь непостижимыми. Гораздо меньше будет сказано по второму тезису о единственности физических теорий. Обстоятельный ответ на этот вопрос потребовал бы огромной работы, как в области теории, так и в области эксперимента; к этой работе мы по существу ещё не приступали.

## Что такое математика?

Кто-то сказал, что философия – это злоупотребление специально разработанной терминологией[7]. Следуя духу этого высказывания, я мог бы определить математику как науку о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями. Особенно важная роль при этом, разумеется, отводится придумыванию новых понятий. Запас интересных теорем в математике быстро иссяк бы, если бы их приходилось формулировать лишь с помощью тех понятий, которые содержатся в формулировках аксиом. Но это еще не все. Понятия элементарной математики, и в частности, элементарной геометрии, были, бесспорно, сформулированы для описания объектов, заимствованных непосредственно из реального мира. Аналогичное утверждение относительно более сложных математических понятий, в том числе понятий, играющих важную роль в физике, по-видимому, неверно. Например, правила действий над парами чисел были, очевидно, специально придуманы так, чтобы мы могли получать результаты, совпадающие с результатами действий над дробями. С правилами же этих действий мы знакомились, ничего не зная о “парах чисел”. Правила действий, производимых над последовательностями, т.е. над иррациональными числами, также относятся к категории правил, которые были сформулированы так, что воспроизводили правила действий над уже известными нам величинами. Более тонкие математические понятия – комплексные числа, алгебры, линейные операторы, борелевские множества и т.д. (этот список можно было бы продолжать почти до бесконечности) – были задуманы как подходящие объекты, с помощью которых математик мог продемонстрировать гибкость своего ума, способность воспринимать формальную красоту. Действительно, определение этих понятий и ясное понимание того, в каких интересных и тонких рассуждениях их можно было бы использовать, служит первым свидетельством остроумия придумавшего их математика. О глубине идеи, заложенной в формулировке нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удается использовать это понятие. Великий математик полностью владеет всем арсеналом допустимых приемов мышления и, действуя подчас весьма рискованно, балансирует на самой грани допустимого. Уже одно то, что его безрассудство не завело его в пучину

[7] Приведенное замечание принадлежит Дубиславу [1].

противоречий, само по себе чудо. Трудно поверить, что дарвиновский процесс естественного отбора довел наше мышление до такой степени совершенства, которой оно, судя по всему, обладает. Однако это не наша тема. Основная мысль, к которой нам еще предстоит вернуться, состоит в другом: не вводя других понятий, кроме содержащихся в аксиомах, математик смог бы сформулировать лишь весьма ограниченное число интересных теорем, и новые понятия он вводит именно так, чтобы над ними можно было производить хитроумные логические операции, которые импонируют нашему чувству прекрасного сами по себе и по получаемым с их помощью результатам, обладающим большой простотой и общностью[8].

Особенно яркой иллюстрацией сказанного служат комплексные числа. Ничто в имеющемся у нас опыте, очевидно, не наводит на мысль о введении этих величин. Если же мы спросим у математика о причинах его интереса к комплексным числам, то он с негодованием укажет на многочисленные изящные теоремы в теории уравнений, степенных рядов и аналитических функций в целом, обязанных своим появлением на свет введению комплексных чисел. Математик отнюдь не склонен отказываться от наиболее прекрасных творений своего гения[9].

## Что такое физика?

Физик видит свою задачу в открытии законов неодушевленной природы. Чтобы смысл этого утверждения стал ясным, необходимо проанализировать понятие “закон природы”.

Окружающий нас мир поразительно сложен, и самая очевидная истина заключается в том, что мы не в состоянии предсказать его будущее. В известном анекдоте лишь оптимист считает будущее неопределенным, тем не менее, в данном случае оптимист прав: будущее непредсказуемо. Как заметил однажды Шредингер, “чудо,

---

[8] Поляни [2] говорит следующее: “Все упомянутые выше трудности проистекают единственно из нашего нежелания понять, что математику как науку нельзя определить, не признав ее наиболее очевидного свойства – того, что она интересна”.

[9] В этой связи читателю будет небезынтересно ознакомиться с весьма красочным замечанием Гильберта об интуиционизме, который пытается “подорвать и обезвредить математику” (см. [3,4]).

что, несмотря на поразительную сложность мира, мы можем обнаруживать в его явлениях определенные закономерности”[10].

Одна из таких закономерностей, открытая Галилеем, состоит в том, что два камня, брошенные в один и тот же момент времени с одной и той же высоты, упадут на землю одновременно. Именно о таких закономерностях и идет речь в законах природы. Галилеева закономерность стала прототипом широкого класса закономерностей.

Удивительной же ее следует считать по двум причинам.

Во-первых, удивительно, что эта закономерность наблюдается не только в Пизе и не только во времена Галилея, но и в любом другом месте земного шара; она была и будет верной всегда. Это свойство закономерности есть не что иное, как известное свойство инвариантности. Некоторое время назад [7] я уже имел случай заметить, что без принципов инвариантности, аналогичных тем, которые вытекают из приведенного выше обобщения замеченного Галилеем опытного факта, физика не могла бы существовать.

Вторая удивительная особенность закономерности, открытой Галилеем, состоит в том, что она не зависит от многих условий, от которых в принципе могла бы зависеть. Закономерность наблюдается безотносительно к тому, идет ли дождь или нет, проводится ли эксперимент в закрытой комнате или камень бросают с Пизанской падающей башни и кто бросает камень – мужчина или женщина. Закономерность остается верной, если двое разных людей одновременно бросают с одинаковой высоты два камня. Существует, очевидно, бесчисленное множество других условий, не существенных для выполнимости открытой Галилеем закономерности. Несущественность столь многих обстоятельств, которые могли бы играть роль в наблюдаемом явлении, мы также называем инвариантностью [7]. Однако эта инвариантность носит несколько иной характер, чем предыдущая, поскольку ее нельзя сформулировать в качестве общего принципа. Исследование условий, влияющих и, наоборот, не влияющих на свободное падение тел, явилось частью первых экспериментальных исследований поля силы тяжести. Лишь искусство и изобретательность экспериментатора позволяют ему выбирать явления, зависящие от сравнительно узкого круга достаточно легко реализуемых и воспроизводимых условий[11]. В рассматриваемом нами примере наиболее важным шагом послужило то обстоятельство,

---

[10] См. работу Шредингера [5], а также работу Дубислава [6].

[11] В этой связи см. также яркий очерк Дейча [8]. Шимони обратил мое внимание на аналогичную мысль у Пирса [9].

что Галилей ограничил свои наблюдения сравнительно тяжелыми телами. И вновь мы должны признать, что не будь явлений, зависящих лишь от небольшого, легко обозримого числа условий, физика не могла бы существовать.

Хотя обе названные выше особенности замеченной Галилеем закономерности и представляются весьма важными с точки зрения философа, они не были особенно удивительными для Галилея и не содержат в себе никакого закона природы. Закон природы содержится в утверждении: время, в течение которого тяжелое тело падает с заданной высоты, не зависит от размеров, материала и формы падающего тела. В рамках ньютоновского второго "закона" это утверждение эквивалентно утверждению о том, что сила тяжести, действующая на падающее тело, пропорциональна его массе, но не зависит от его размеров, материала и формы.

Проведенный выше анализ преследовал одну цель – напомнить, что существование "законов природы" не столь уж естественно и самоочевидно и что способность человека, тем не менее, открывать законы природы еще более удивительна[12]. Автор уже имел возможность некоторое время тому назад [11][13] обратить внимание читателей на иерархию "законов природы" – последовательность слоев, каждый из которых содержит более широкие и общие законы природы, чем предыдущий, а открытие его означает более глубокое по сравнению с уже известными слоями проникновение в строение Вселенной. Однако в интересующем нас случае наиболее важным является то, что все эти законы природы вместе со всеми, пусть даже самыми далекими следствиями из них, охватывают лишь незначительную часть наших знаний о неодушевленном мире. Все законы природы – это условные утверждения, позволяющие предсказывать какие-то события в будущем на основе того, что известно в данный момент, причем для предсказания будущего некоторые аспекты состояния мира в данный момент (практически подавляющее большинство условий, определяющих это состояние) несущественны. Несущественность здесь понимается в смысле второй особенности, упоминавшейся при анализе открытой Галилеем закономерности[14].

---

[12] Шредингер [10] говорит, что второе чудо также может выходить за рамки человеческого разума.

[13] См. также работу Маргенау [12].

[14] Автор считает излишним напоминать о том, что приведенная выше формулировка закона Галилея не исчерпывает полностью содержания выполненных Галилеем наблюдений по выяснению законов свободного падения тел.

Законы природы хранят молчание относительно всего, что касается состояния мира в данный момент, например, существования Земли, на которой мы живем и на которой Галилей проводил свои эксперименты, существования Солнца и всего, что нас окружает. Отсюда следует, что законы природы можно использовать для предсказания будущего лишь в исключительных обстоятельствах, а именно лишь тогда, когда известны все существенные (для предсказания будущего) условия, определяющие состояние мира в данный момент. Отсюда же следует, что создание машин, функционирование которых физик может предвидеть заранее, является наиболее эффективным его достижением. В этих машинах физик создает ситуацию, при которой все существенные параметры известны и поведение машины предсказуемо. Примерами таких машин могут служить радары и ядерные реакторы.

Главная цель, которую мы преследовали до сих пор, – показать, что все законы природы представляют собой некие условные утверждения и охватывают лишь очень небольшую часть наших знаний об окружающем мире. Так, классическая механика – наиболее известный прототип физической теории – позволяет указывать по известным координатам и скоростям любых тел вторые производные от координат этих тел по времени, но ничего не говорит о существовании самих тел и значениях их координат и скоростей в данный момент времени. Истины ради следует упомянуть и о том, что, как стало известно лет тридцать назад, даже условные утверждения, в форме которых мы выражаем законы природы, не являются абсолютно точными, поскольку представляют собой лишь вероятностные законы. Опираясь на них и используя то, что нам известно о состоянии неодушевленного мира в данный момент, мы можем лишь заключать более или менее разумные пари о его будущих свойствах. Вероятностный характер законов природы не позволяет нам высказывать никаких категорических утверждений, даже если ограничиться категорическими утверждениями, содержание которых обусловлено состоянием мира в данный момент. Вероятностный характер “законов природы” проявляется и в случае машин, и его нетрудно обнаружить, по крайней мере, в ядерных реакторах, работающих в режиме очень малой мощности. Тем не менее, область знаний, охватываемая законами природы, подвержена дополнительным ограничениям, вытекающим из вероятностного характера этих законов[15] (в дальнейшем эти ограничения не будут играть для нас никакой роли).

[15] См. например, работу Шредингера [5].

## Роль математики в физических теориях

Освежив в памяти наиболее существенные черты математики и физики, мы можем теперь лучше разобраться в той роли, которую математика играет в физических теориях.

В своей повседневной работе физик использует математику для получения результатов, вытекающих из законов природы, и для проверки применимости условных утверждений этих законов к наиболее часто встречающимся или интересующим его конкретным обстоятельствам. Чтобы это было возможным, законы природы должны формулироваться на математическом языке. Однако получение результатов на основе уже существующих теорий – отнюдь не самая важная роль математики в физике. Исполняя эту функцию, математика, или, точнее, прикладная математика, является не столько хозяином положения, сколько средством для достижения определенной цели.

Математике, однако, отводится в физике и другая, более "суверенная" роль. Суть ее содержится в утверждении, сделанном нами при обсуждении роли прикладной математики: чтобы стать объектом применения прикладной математики, законы природы должны формулироваться на языке математики. Утверждение о том, что природа выражает свои законы на языке математики, по существу было высказано 300 лет назад[16]. В наши дни оно верно более чем когда-либо. Чтобы продемонстрировать всю важность использования математических понятий при формулировке законов физики, достаточно вспомнить, например, аксиомы квантовой механики, сформулированные в явном виде великим математиком фон Нейманом [14] и в неявном виде великим физиком Дираком [13]. В основу квантовой механики положены два понятия: понятие состояний и понятие наблюдаемых. Состояния – это векторы в гильбертовом пространстве; наблюдаемые – самосопряженные операторы, действующие на векторы состояния. Возможные значения наблюдаемых определяются собственными значениями этих операторов и т.д., но мы предпочитаем остановиться на этом и не перечислять математических понятий, развитых в теории линейных операторов.

Разумеется, для формулировки законов природы физики отбирают лишь некоторые математические понятия, используя, таким образом, лишь небольшую долю всех имеющихся в математике понятий. Правда,

[16] Его приписывают Галилею.

понятия выбираются из длинного списка математических понятий не произвольно: во многих, если не в большинстве, случаях необходимые понятия были независимо развиты физиками, и лишь впоследствии было установлено их тождество с понятиями, уже известными математикам. Однако утверждать, как это нередко приходится слышать, будто так происходит потому, что математики используют лишь простейшие из возможных понятий, а последние встречаются в любом формализме, было бы неверно. Как мы уже видели, математические понятия вводятся не из-за их логической простоты (даже последовательности пар чисел – понятия далеко не простые), а потому, что они особенно легко поддаются тонким логическим операциям и облегчают проведение глубоких и блестящих рассуждений. Не следует забывать, что гильбертово пространство квантовой механики – это комплексное гильбертово пространство с эрмитовым скалярным произведением. Для неподготовленного ума понятие комплексного числа далеко не естественно, не просто и никак не следует из физических наблюдений. Тем не менее, использование комплексных чисел в квантовой механике отнюдь не является вычислительным трюком прикладной математики, а становится почти необходимым при формулировке законов квантовой механики. Кроме того, по-видимому, не только комплексным числам, но и так называемым аналитическим функциям суждено сыграть решающую роль в формулировке квантовой теории. Я имею в виду быстро развивающуюся теорию дисперсных соотношений.

Невольно создается впечатление, что чудо, с которым мы сталкиваемся здесь, не менее удивительно, чем чудо, состоящее в способности человеческого разума нанизывать один за другим тысячи аргументов, не впадая при этом в противоречие, или два других чуда – существование законов природы и человеческого разума, способного раскрыть их. Из всего, что мне известно, больше всего похоже на объяснение плодотворности использования математических понятий в физике замечание Эйнштейна: “Мы с готовностью воспринимаем лишь те физические теории, которые обладают изяществом”. Может показаться спорным, что понятия математики, постижение которых требует напряженной работы мысли, обладают изяществом. Замечание Эйнштейна в лучшем случае отражает определенные особенности теории, в которую мы готовы поверить, и не затрагивает внутренней непротиворечивости теории. Рассмотрению последней проблемы посвящается следующий раздел нашего доклада.

## Так ли уж удивителен успех физических теорий?

Почему физик использует математику для формулировки своих законов природы? Это можно объяснить тем, что физик довольно безответственно относится к своим действиям. В результате, когда он обнаруживает связь между двумя величинами, напоминающую какую-нибудь связь, хорошо известную в математике, он тотчас же делает вывод, что обнаруженная им связь и *есть* именно та связь, поскольку никакие другие связи того же типа ему неизвестны. В своем докладе я вовсе не собираюсь опровергать выдвигаемое против физика обвинение в том, что он ведет себя несколько безответственно. В какой-либо мере этот упрек справедлив. Важно заметить, однако, что математическая формулировка полученных физиком зачастую не слишком точных экспериментальных данных приводит в огромном числе случаев к удивительно точному описанию широкого класса явлений. Это свидетельствует о том, что математический язык служит не только средством общения, но и является единственным языком, на котором мы можем говорить. Правильно будет сказать, что математический язык отвечает существу дела. Рассмотрим несколько примеров.

Первый пример встречается особенно часто – это движение планет. Законы свободного падения были надежно установлены в результате экспериментов, проведенных главным образом в Италии. Эти эксперименты не могли быть очень точными в том смысле, как мы понимаем точность сегодня, отчасти из-за сопротивления воздуха, отчасти из-за того, что во времена Галилея еще не умели измерять короткие промежутки времени. Тем не менее, не удивительно, что в результате этих исследований итальянские физики узнали о том, как движутся тела сквозь атмосферу. Затем Ньютон сопоставил закон свободного падения тел с движением Луны, заметив, что параболическая траектория падающего камня на Земле и круговая орбита Луны на небе являются частными случаями одного и того же математического объекта – эллипса. Ньютон постулировал свой закон всемирного тяготения, опираясь на единственное и в те времена весьма грубое численное совпадение. С философской точки зрения сформулированный Ньютоном закон тяготения противоречил и духу того времени и самому Ньютону. С точки зрения эксперимента закон всемирного тяготения был основан на весьма отрывочных наблюдениях. Математический язык, на котором этот закон был сформулирован, использует понятие второй производной, а те из нас, кто хоть раз пытался провести соприкасающуюся окружность к какой-нибудь кривой, знают, что понятие второй производной не слишком наглядно. Закон всемирного тяготения, который Ньютон, не желая того, установил и который он мог проверить лишь с точностью около 4%, при проверке оказался правильным с точностью до 0,0001% и настолько тесно ассоциировался с представлением об абсолютной точности, что физики лишь недавно осмелились вновь заняться исследованием пределов его точности [15]. На пример с законом Ньютона ссылались и ссылаются многие авторы. Мы не могли не привести его первым как фундаментальный пример закона, формулируемого с помощью простых с точки зрения математика понятий и обладающего точностью, лежащей далеко за пределами всякого разумного ожидания. Воспользуемся этим примером для того, чтобы еще раз сформулировать наш основной тезис: во-первых, закон всемирного тяготения (отчасти потому, что в его формулировку входит понятие второй производной) прост лишь для математика, но отнюдь не для обыкновенного здравомыслящего человека и даже не для первокурсника, если тот не обладает математическими способностями; во-вторых, закон всемирного тяготения – это условный закон с весьма ограниченной сферой применимости. Он ничего не говорит ни о Земле, притягивающей те камни, которые бросал Галилей, ни о круговой форме лунной орбиты, ни о планетах солнечной системы. Объяснение всех этих начальных условий остается на долю геолога и астронома, и задача, стоящая перед ними, отнюдь не легка.

Вторым примером служит обычная элементарная квантовая механика. Последняя берет свое начало с того момента, когда Макс Борн заметил, что некоторые правила вычислений, разработанные Гейзенбергом, формально совпадают с давно известными математикам правилами действий над матрицами. Борн, Иордан и Гейзенберг предложили заменить матрицами переменные, отвечающие координатам и скоростям в уравнениях классической механики [16–17].

Они применили правила матричной механики к решению нескольких сильно идеализированных проблем и пришли к весьма удовлетворительным результатам, однако в те времена не было разумных оснований надеяться, что построенная ими матричная механика окажется верной и при более реальных условиях. Сами авторы надеялись, что предложенная ими “механика в основном окажется верной”. Первым, кто несколькими месяцами позже применил матричную механику к решению реальной задачи – атому водорода, – был Паули. Полученные им результаты оказались в хорошем согласии с экспериментом. Такое положение дел вызывало удовлетворение, но было еще объяснимым, поскольку при выводе своих правил Гейзенберг исходил из проблем, в число которых входила старая теория атома водорода. Чудо произошло лишь тогда, когда матричную механику или математически эквивалентную ей теорию применили к задачам, для которых правила Гейзенберга не имели смысла. При выводе правил Гейзенберг предполагал, что классические уравнения движения допускают решения, обладающие определенными свойствами периодичности. Уравнения же движения двух электронов в атоме гелия (или еще большего числа электронов в более тяжелых атомах) не обладают этими свойствами, и правила Гейзенберга в этих случаях неприменимы. Тем не менее, основное состояние гелия, вычисленное несколько месяцев спустя Киношитой в Корнельском университете и Бэзли в Бюро стандартов, в пределах точности наблюдений, составляющей около 0,0000001, находилось в согласии с экспериментальными данными. В этом случае мы поистине извлекли из уравнений нечто такое, что в них не закладывали.

Аналогичная ситуация возникла и при изучении качественных особенностей “сложных спектров”, т.е. спектров тяжелых атомов. Я вспоминаю один разговор с Иорданом, который сказал следующее: “Когда были получены качественные закономерности спектров, последняя возможность изменить основы матричной механики состояла в том, чтобы обнаружить противоречие между правилами, выведенными из квантовой механики, и правилами, установленными в результате экспериментальных исследований”. Иначе говоря, Иордан понимал, насколько беспомощными мы оказались бы (по крайней мере, временно), если бы в теории атома гелия неожиданно возникло противоречие. Теорию атома гелия в то время разрабатывали Келлнер и Хилераас. Используемый ими математический формализм был слишком ясен и незыблем, и, не произойди упомянутое выше чудо с гелием, кризис был бы неизбежен. Разумеется, физика сумела бы так или иначе преодолеть этот кризис. Верно и другое: физика в том виде, как мы знаем ее сегодня, не могла бы существовать, если бы постоянно не повторялись чудеса, подобные чуду с атомом гелия, которое, по-видимому, следует считать наиболее удивительным, но далеко не единственным событием во всей истории развития элементарной квантовой механики. Перечень таких чудес можно было бы неограниченно продолжать. Квантовая механика достигла многих почти столь же удивительных успехов, и это вселяет в нас уверенность в том, что она, как мы говорим, верна.

В качестве последнего примера рассмотрим квантовую электродинамику, или теорию лэмбовского сдвига. В то время как ньютоновская теория тяготения еще обладала наглядными связями с опытом, в формулировку матричной механики опыт входит лишь в утонченной и сублимированной форме правил Гейзенберга. Квантовая теория лэмбовского сдвига, основные идеи которой выдвинул Бете, была разработана Швингером. Это чисто математическая теория, и единственный вклад эксперимента в нее состоял в доказательстве существования предсказываемого ею измеримого эффекта. Согласие с вычислениями оказалось лучше 0,001.

Предыдущие три примера (число их можно было бы увеличить почти до бесконечности) призваны были продемонстрировать эффективность и точность математической формулировки законов природы с помощью специально отобранных “удобных в обращении” понятий; выяснилось, что “законы природы” обладают почти фантастической точностью, но строго ограниченной сферой применимости. Я предлагаю назвать закономерность, подмеченную на этих примерах, эмпирическим законом эпистемологии. Вместе с принципами инвариантности физических теорий эмпирический закон эпистемологии служит прочным основанием этих теорий. Не будь принципов инвариантности, физические теории нельзя было бы подкреплять экспериментом. Не будь эмпирического закона эпистемологии, нам не хватило бы мужества и уверенности – эмоциональных предпосылок, без которых нельзя было бы успешно исследовать “законы природы”. Сакс, с которым я обсуждал эмпирический закон эпистемологии, назвал его догматом веры физика-теоретика и был, несомненно, прав. Однако то, что он назвал нашим догматом веры, подкрепляется примерами из практики, куда более многочисленными, чем три примера, приведенные в нашем докладе.

## Единственность физических теорий

Эмпирическая природа сделанных выше замечаний представляется мне самоочевидной. Они явно не принадлежат к числу “логически необходимых”, и, чтобы доказать это, вовсе не нужно указывать на то, что они применимы лишь к очень незначительной части наших знаний о неодушевленном мире. Было бы нелепо считать, будто существование простых с точки зрения математика выражений для второй производной от координат по времени самоочевидно, в то время как аналогичных выражений для самой координаты или скорости не существует. Тем большее удивление вызывает та готовность, с которой чудесный дар, содержащийся в эмпирическом законе эпистемологии, был воспринят как нечто само собой разумеющееся. Способность человеческого разума нанизывать, оставаясь "правым" (т.е. не впадая в противоречие), цепочки из 1000 и более аргументов – дар, не менее удивительный.

Каждый эмпирический закон обладает тем неприятным свойством, что пределы его применимости неизвестны. Мы уже убедились в том, что закономерности в явлениях окружающего нас мира допускают формулировку с помощью математических понятий, обладающую сверхъестественной точностью. С другой стороны, в окружающем нас мире имеются и такие явления, рассматривая которые, мы не уверены, что между ними существуют какие-либо точные закономерности. Такие явления мы называем начальными условиями. Вопрос, который возникает в этой связи, состоит в следующем: не сольются ли различные закономерности, т.е. различные законы природы, которые будут открыты, в единое непротиворечивое целое или, по крайней мере, не обнаружат ли они асимптотическую тенденцию к такому слиянию? В противном случае мы всегда могли бы указать законы природы, не имеющие между собой ничего общего. Именно так, по крайней мере, обстоит дело с законами наследственности и законами физики. Может случиться даже так, что следствия из некоторых законов природы будут противоречить друг другу, но мы не захотим отказаться ни от одного из законов, поскольку каждый из них в своей области достаточно убедителен. Обнаружив противоречие между отдельными законами природы, мы можем покориться такой ситуации и потерять интерес к разрешению конфликта между различными теориями. Мы можем разочароваться в поисках "абсолютной истины", т.е. непротиворечивой картины, образующейся при слиянии в единое целое маленьких картинок, отражающих различные аспекты природы.

Обе альтернативы полезно проиллюстрировать на примере. В современной физике существуют две теории, обладающие огромной мощью и представляющие большой интерес: квантовая теория и теория относительности. Своими корнями названные теории уходит во взаимно исключающие группы явлений. Теория относительности применима к макроскопическим телам, например, к звездам. Первичным в теории относительности считается явление совпадения, т.е. в конечном счете, столкновения частиц. Сталкиваясь, частицы определяют или, по крайней мере, должны были бы определять (если бы они были бесконечно малыми) точку в пространстве-времени. Квантовая теория своими корнями уходит в мир микроскопических явлений, и с ее точки зрения явление совпадения или столкновения, даже если оно происходит между частицами, не обладающими пространственной протяженностью, нельзя считать первичным и четко локализованным в пространстве-времени. Обе теории – квантовая теория и теория относительности – оперируют различными математическими понятиями: первая – понятием четырехмерного риманова пространства, вторая – понятием бесконечномерного гильбертова пространства. До сих пор все попытки объединить обе теории оканчивались неудачей, т.е. не удавалось найти математическую формулировку теории, по отношению к которой квантовая теории и теория относительности играли бы роль приближений. Все физики считают, что объединение обеих теорий принципиально возможно и нам удастся в конце концов достичь его. Однако нельзя исключать и другую возможность – что нам не удастся построить теорию, объединяющую квантовую механику и теорию относительности. Приведенный пример показывает, что ни одну из названных возможностей – объединение двух теорий и конфликт между ними – нельзя отбрасывать заранее.

Чтобы получить хотя бы намек, какую же из двух альтернатив нам следует, в конце концов, ожидать, притворимся чуточку более невежественными, чем мы являемся в действительности, и опустимся на более низкий уровень знания. Если, оставаясь на этом уровне знания, мы будем в состоянии обнаружить возможность слияния наших теорий, то можно с уверенностью сказать, что и на истинном уровне наших знаний такое слияние также окажется возможным. С другой стороны, обнаружив конфликт на более низком уровне знаний, мы не сможем исключить возможность существования непримиримо конфликтующих теорий и после возвращения на истинный уровень наших знаний. Уровень знания и степень нашего интеллектуального развития изменяются непрерывно, и маловероятно, чтобы сравнительно слабая вариация этой непрерывной функции изменяла имеющуюся в нашем распоряжении картину мира, внезапно превращая ее из несогласованной в последовательную[17].

Высказанной только что точке зрения противоречит тот факт, что некоторые теории, ошибочность которых нам заведомо известна, позволяют получать удивительно точные результаты. Если бы мы знали немного меньше, то круг явлений, объяснимых этими “ложными” теориями, казался бы нам достаточно большим для того, чтобы уверовать в их “правильность”. Однако эти теории мы считаем “ошибочными” именно потому, что, как показывает более тщательный анализ, они противоречат более широкой картине, и, если таких теорий обнаружено достаточно много, они непременно вступают в конфликт друг с другом. Не исключена и другая возможность: теории, которые мы, опираясь на достаточно большое, по нашему мнению, число подтверждающих фактов, считаем “верными”, на самом деле являются “ошибочными” потому, что противоречат более широкой, вполне допустимой, но пока еще не открытой теории. Если бы дело обстояло именно так, мы должны были бы ожидать конфликта между нашими теориями, когда число их превысит определенный уровень и они будут охватывать достаточно широкий круг явлений. В отличие от уже упоминавшегося догмата веры физика-теоретика эту мысль следовало бы назвать “кошмаром” теоретика.

Рассмотрим несколько примеров “ошибочных” теорий, дающих, вопреки своей ошибочности, удивительно точное описание различных групп явлений. Если не быть чересчур придирчивым, то некоторые подробности, относящиеся к этим примерам, можно опустить. Успех первых основополагающих идей Бора в теории строения атома был весьма ограниченным, как, впрочем, и успех эпициклов Птолемея. Теперь мы находимся в более выгодном положении и можем точно указать все явления, которые допускают описание в рамках этих примитивных теорий. Мы не можем утверждать ничего подобного о так называемой теории

[17] Эту мысль я написал после больших колебаний. Я убежден, что в эпистемологических дискуссиях полезно отказаться от представления об исключительно высоком положении уровня человеческого интеллекта на абсолютной шкале. В ряде случаев полезно рассматривать достижения, доступные и при уровне развития, свойственном отдельным видам животных. Я полностью отдаю себе отчет в том, что идеи, приведенные в тексте доклада, очерчены слишком бегло и не подвергались достаточно критическому обсуждению, чтобы их можно было считать надежными.

свободных электронов, которая дает удивительно точную картину свойств большинства, если не всех, металлов, полупроводников и изоляторов. В частности, теория свободных электронов объясняет тот факт (который так и не удалось объяснить на основе “настоящей теории”), что удельное сопротивлений изоляторов может в $10^{26}$ раз превосходить удельное сопротивление металлов. Более того, не существует экспериментальных данных, которые бы убедительно показали, что сопротивление конечно при условиях, когда, согласно теории свободных электронов, оно должно было бы обращаться в бесконечность. Тем не менее, мы убеждены, что эта теория представляет собой лишь грубое приближение и при описании явлений, происходящих в твердых телах, ее должна бы заменить более точная картина.

Достигнутые к настоящему времени успехи позволяют считать, что ситуация с теорией свободных электронов несколько тревожна, но отнюдь не свидетельствует о каких-то непреодолимых противоречиях. Теория свободных элементов заставляет нас сомневаться в другом: насколько мы можем доверять численному совпадению между теорией и экспериментом как показателю правильности теории. К такого рода сомнениям мы привыкли.

Гораздо больше трудностей и сомнений возникло бы, если бы в один прекрасный день нам удалось построить теорию сознания или разработать теоретическую биологию, столь же непротиворечивую и убедительную, как и существующие ныне теории неодушевленного мира. Если говорить о биологии, то законы наследственности Менделя и последующее развитие генетики вполне можно считать зачатками такой теории. Более того, не исключено, что кому-нибудь удастся обнаружить некий абстрактный аргумент, свидетельствующий о конфликте между такой теорией и общепринятыми основами физики. Аргумент этот может быть столь абстрактным, что упомянутый конфликт нельзя будет разрешить в пользу одной из теорий с помощью эксперимента. Такая ситуация сильно пошатнула бы нашу веру в существующие теории и в реальность создаваемых нами понятий. Мы испытали бы чувство глубокого разочарования в поисках того, что я назвал “абсолютной истиной”. Причина, по которой подобную ситуацию нельзя считать заранее исключенной, состоит в том, что нам в принципе неизвестно, почему наши теории “работают” так хорошо. Их точность может еще не свидетельствовать об их правильности и непротиворечивости. Автор данного доклада убежден, что нечто подобное возникает при попытке сравнить современные законы наследственности с физическими законами.

Я хотел бы закончить более радостной нотой. Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы.

Я хотел бы поблагодарить Поляни, который давно уже оказывает глубокое влияние на мою точку зрения в связи с проблемами эпистемологии, и Баргмана за дружескую критику, способствовавшую достижению ясности. Я очень признателен также Шимони, просмотревшему рукопись данного доклада и обратившему мое внимание на статьи Пирса.

## Литература

1. *Dubislav W.*, Die Philosphie der Mathenatik in der Gegenwart, Junker und Dűnnhaupt Verlag, Berlin, 1932.
2. *Polanyi M.*, Personal Knowledge, University of Chicago Press, Chicago, 1958, p. 188.
3. *Hilbert D.*, Abhandl. Math. Sem., Univ. Hamburg, 157 (1922).
4. *Hilbert D.*, Gesammelte Werke, Springer Verlag, Berlin, 1935.
5. *Schrodinger E.*, Uber Indeterminismus in Physik, J. A. Barth, Leipzig, 1932.
6. *Dubislav W.*, Naturphilosophie, Junker und Dűnnhaupt Verlag, Berlin, 1933, Kap. 4.
7. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 521 (1949).
8. *Deutsch M.*, Daedalus, **87**, 86 (1958).
9. *Peirce C.S.*, Essays in Philosophy of Science, The Liberal Arts Press, New York, 1957, p. 237.
10. *Schrodinger E.*, What is Life?, Cambridge University Press, Cambridge, 1945, p. 31 (Имеется перевод: Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики?, ИЛ, 1947.)
11. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **94**, 422 (1950).
12. *Margenau H.*, The Nature of Physical Reality, McGraw-Hill, New York, 1950, ch. 8.
13. *Dirac P.A.M*, Quantum Mechanics, 3rd Ed., Clarendon Press, Oxford, 1947. (Имеется перевод: *Дирак П.А.М.*, Принципы квантовой механики, Физматгиз. М., 1960.)
14. von Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechnik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*. Математические основы квантовой механики, изд-во “Наука”. М., 1964.)
15. *Dicke R.H.*, Amer. Sci., **25** (1959).
16. *Born M., Jordan P.*, Zs. Phys., **34**, 858 (1925).
17. *Born M., Heisenberg W., Jordan P.*, Zs. Phys., **35**, 557 (1926).

*ПРИЛОЖЕНИЕ* 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УТВЕЖДАЮ
Заместитель Министра образования Российской Федерации
______________ В.Д. Шадриков
15 марта 2000 г.
Номер государственной регистрации 414 ЕН / СП

# ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010100 - Математика
Специальности 010900 - Механика

## Математический анализ

Предмет математического анализа, сведения о множествах и логической символике, отображения и функции.

Действительные числа: алгебраические свойства множества $\mathbb{R}$. действительных чисел; аксиома полноты множества $\mathbb{R}$. Действия над действительными числами, принцип Архимеда. Основные принципы полноты множества $\mathbb{R}$: существование точной верхней (нижней) грани числового множества, принцип вложенных отрезков, дедекиндово сечение, лемма о конечном покрытии.

Теория пределов: предел числовой последовательности; основные свойства и признаки существования предела; предельные точки множества и теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности; предел монотонной последовательности; число “***e***”, верхний и нижний пределы; критерий Коши существования предела.

Топология на $\mathbb{R}$; предел функции в точке; свойства пределов; бесконечно малые и бесконечно большие функции и последовательности; предел отношения синуса бесконечно малого аргумента к аргументу; общая теория предела; предел функции по базису фильтра (по базе); основные свойства предела; критерий Коши существования предела; сравнение поведения функций на базе; символы “***o***”, “***O***”, “~”.

*Итерационные последовательности; простейшая форма принципа неподвижной точки для сжимающего отображения отрезка, итерационный метод решения функциональных уравнений.

Непрерывные функции: локальные свойства непрерывных функций; непрерывность функции от функции; точка разрыва; ограниченность функции, непрерывной на отрезке; существование наибольшего и наименьшего значений; прохождение через все промежуточные значения; равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке; монотонные функции, существование и непрерывность обратной функции, непрерывность элементарных функций.

Дифференциалы и производные: дифференцируемость функции в точке; производная в точке, дифференциал и их геометрический смысл; механический смысл производной; правила дифференцирования; производные и дифференциалы высших порядков; формула Лейбница.

Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях; локальная формула Тейлора; асимптотические разложения элементарных функций; формула Тейлора с остаточным членом; применение дифференциального исчисления к исследованию функций, признаки постоянства, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, раскрытие неопределенностей; геометрические приложения.

Неопределенный интеграл: первообразная функция, неопределенный интеграл и его основные свойства; таблица формул интегрирования; замена переменной, интегрирование по частям; интегрирование рациональных функций; интегрирование некоторых простейших иррациональных и трансцендентных функций.

Определенный интеграл: задачи, приводящие к понятию определенного интеграла; определенный интеграл Римана; критерий интегрируемости; интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции и ограниченной функции с конечным числом точек разрыва; свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении; дифференцирование по переменному верхнему пределу; существование первообразной от непрерывной функции; связь определенного интеграла с неопределенным: формула Ньютона–Лейбница; замена переменной; интегрирование по частям; длина дуги и другие геометрические, механические и физические приложения; функции ограниченной вариации; теорема о представлении функции ограниченной вариации и основные свойства; интеграл Стилтьеса; признаки существования интеграла Стилтьеса и его вычисления.

Функции многих переменных: Евклидово пространство $\boldsymbol{n}$ измерений; обзор основных метрических и топологических характеристик точечных множеств евклидова пространства; функции многих переменных, пределы, непрерывность; свойства непрерывных функций; дифференциал и частные производные функции многих переменных; производная по направлению; градиент; достаточное условие дифференцируемости; касательная плоскость и нормаль к поверхности; дифференцирование сложных функций; частные производные высших порядков, свойства смешанных производных; дифференциалы высших порядков; формула Тейлора для функций нескольких независимых переменных; экстремум; отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, их дифференцирование, матрица производной; якобианы; теоремы о неявных функциях; замена переменных; зависимость функций; условный экстремум.

*Локальное обращение дифференцируемого отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и теорема о неявном отображении; принцип неподвижной точки сжимающего отображения полного метрического пространства.

Числовые ряды: сходимость и сумма числового ряда; критерий Коши; знакопостоянные ряды; сравнение рядов; признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак сходимости; признак Лейбница; абсолютная и условная сходимость; преобразование Абеля и его применение к рядам;

перестановка членов абсолютно сходящегося ряда; теорема Римана; операции над рядами; двойные ряды; понятие о бесконечных произведениях.

Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость; признаки равномерной сходимости; теорема о предельном переходе; теоремы о непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании; степенные ряды, радиус сходимости, формула Коши-Адамара; равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда; почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов; ряд Тейлора; разложение элементарных функций в степенные ряды; оценка с помощью формулы Тейлора погрешности при замене функции многочленом; ряды с комплексными членами; формулы Эйлера; применение рядов к приближенным вычислениям; теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

Несобственные интегралы: интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций; признаки сходимости; интегралы, зависящие от параметра; непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; несобственные интегралы, зависящие от параметра: равномерная сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; применение к вычислению некоторых интегралов; функции, определяемые с помощью интегралов, бета- и гамма-функции Эйлера.

Ряды Фурье: ортогональные системы функций; тригонометрическая система; ряд Фурье; равномерная сходимость ряда Фурье; признаки сходимости ряда Фурье в точке; принцип локализации; минимальное свойство частных сумм ряда Фурье; неравенство Бесселя; достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье; сходимость в среднем; равенство Парсеваля; интеграл Фурье и преобразование Фурье.

Двойной интеграл и интегралы высшей кратности: двойной интеграл, его геометрическая интерпретация и основные свойства; приведение двойного интеграла к повторному; замена переменных в двойном интеграле; понятие об аддитивных функциях области; площадь поверхности; механические и физические приложения двойных интегралов; интегралы высшей кратности; их определение, вычисление и простейшие свойства; несобственные кратные интегралы.

Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности: криволинейные интегралы; формула Грина; интегралы по поверхности; формула Остроградского; элементарная формула Стокса; условия независимости криволинейного интеграла от формы пути.

Элементы теории поля: скалярное поле; векторное поле; поток, расходимость, циркуляция, вихрь; векторная интерпретация формул Остроградского и Стокса; потенциальное поле; векторные линии и векторные трубки; соленоидальное поле; оператор “набла”.

*Понятие о дифференциальных формах и интегрирование их по цепям; абстрактная теорема Стокса и получение из нее элементарной формулы Стокса и формулы Гаусса-Остроградского.

*Примечание*: разделы, помеченные звездочкой, при необходимости могут быть опущены.

*ПРИЛОЖЕНИЕ* 2

# Краткая программа курса “**Математический анализ**” для потока 2007 года

Предмет математического анализа.

**Элементы теории множеств.** (4 час. лекц.). Некоторые первоначальные сведения о логической символике. Основные теоретико-множественные понятия (объединение, пересечение, разность, дополнение) и их основные свойства. Конечные и бесконечные множества. Равномощные множества. Счетные и континуальные множества.

**Отображение.** (6 час. лекц.). Основное определение. Основные термины, связанные с понятием отображения (область определения, множество значений, функция, аргумент и другие). Образ множества относительно отображения, прообраз множества относительно отображения, их свойства. Композиция отображений. Классификации отображений: сюръекция, инъекция и биекция; действительные и числовые отображения. Обратное отображение. Способы задания отображения. Элементарные числовые отображения.

* История развития понятия отображения.

**Множество действительных чисел.** (5 час. лекц.). Аксиоматика множества действительных чисел. Алгебраические свойства, принцип Архимеда. Множества натуральных, целых, рациональных, иррациональных чисел. Числовые промежутки (интервал, сегмент и другие). Супремум, инфимум числового множества (критерий существования супремума, инфимума). Аксиома полноты (различные формулировки: существование супремума и инфимума, лемма о вложенных сегментах, дедекиндово сечение).

**Сходящаяся числовая последовательность.** (7 час. лекц.) Предел последовательности и простейшие свойства (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, сходимость суммы последовательностей, сходимость и мажорирование, теорема о “двух милиционерах”, другие свойства). Предел монотонной последовательности. Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности. Сравнение бесконечно малых последовательностей. Таблица пределов.

*Различные подходы к построению теории действительных чисел. Верхний и нижний пределы числовой последовательности.

**Метрическое пространство.** (16 час. лекц.). Метрика и метрическое пространство. ε-Окрестность точки, открытое множество и замкнутое множество, их основные свойства. Ограниченное множество, замыкание, граница и другие основные понятия, связанные с множествами в метрическом пространстве. Канторово множество. Сходящаяся последовательность, её основные свойства (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, арифметические и порядковые свойства и другие). Фундаментальная последовательность и её основные свойства. Полное метрическое пространство. Компактное множество, основные свойства (критерии компактности, лемма о вложенных компактных множествах). Примеры метрических пространств (множество действительных чисел $\mathbb{R}$, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$). Основные метрические свойства пространства $\mathbb{R}^n$: теорема Больцано-Вейерштрасса, критерий полноты, критерий компактности.

**Непрерывное отображение.** (7 час. лекц.). Непрерывное в точке отображение из метрического пространства в метрическое пространство. Ограниченное отображение. Связь между непрерывностью отображения и сходящимися последовательностями значений отображения. Предел отображения при стремлении аргумента к фиксированной точке. Свойства предела отображения (единственность предела, ограниченность отображения и другие). Связь между непрерывностью и существованием предела отображения. Локальные свойства непрерывного отображения. Критерий непрерывности через открытые (замкнутые) множества. Теорема об образе компактного множества относительно непрерывного отображения. Первая теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения. Непрерывность композиции. Равномерная непрерывность отображения.

**Действительное непрерывное отображение**. (4 час. лекц.). Свойства действительных непрерывных отображений: непрерывность суммы и произведения непрерывных отображений, вторая теорема Вейерштрасса о существование наибольшего и наименьшего значений непрерывного на компактном множестве отображения и другие. Супремум и инфимум действительного отображения. Свойства пределов действительных отображений (в частности, теорема о “двух милиционерах”).

**Предел и непрерывность отображения из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$**. (2 час. лекц.).

**Числовое непрерывное отображение.** (5 час. лекц.). Свойства числового непрерывного отображения: прохождение через все промежуточные значения (теорема Коши) и другие. Бесконечные пределы числового отображения, пределы числового отображения при стремлении аргумента к бесконечностям. Односторонние пределы отображения. Бесконечно малое и бесконечно большое отображение в точке (при стремлении аргумента к бесконечностям), символы “$o$”, “$O$”, “~”. Точки разрыва первого и второго рода числового отображения. Непрерывность элементарных отображений. Таблица пределов числовых отображений. Метрическое пространство непрерывных отображений $C[a,b]$.

**Дифференцируемое числовое отображение** Дифференциальное исчисление. (14 час. лекц.). Линейное отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Приращение отображения в точке. Дифференцируемое в точке отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемого числового отображения. Производная отображения в точке, производное отображение. Связь производной с дифференциалом, их геометрический и механический смысл. Правила нахождения дифференциала и производной. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя нахождения предела отображения. Повторное дифференцирование и старшие производные. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Необходимое и достаточные условия локального экстремума.

**Первообразная**. (6 час. лекц.). Первообразное отображение (первообразная) для числового отображения. Основные свойства. Таблица первообразных. Нахождение первообразных с помощью замены переменной и по частям. Нахождение первообразных для рациональных отображений и для некоторых простейших иррациональных и трансцендентных отображений.

**Дифференцируемое отображение из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$**. (26 час. лекц.). Линейное отображение из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$. Приращение отображения в точке. Дифференцируемое в точке отображение из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемого отображения из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$. Производная матрица и частные производные отображения из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$ в точке. Геометрический смысл дифференциала и частных производных отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. Необходимое условие дифференцируемости отображения из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$. Достаточное условие дифференцируемости отображения из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$. Частные производные и дифференциал композиции отображений. Теорема о конечных приращениях. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявно заданного отображения. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных частных производных. Формула Тейлора. Необходимое и достаточное условия локального экстремума действительного отображения. Условный экстремум действительного отображения (необходимое условие, геометрический смысл метода Лагранжа).

*Различные подходы к дифференциалу высшего порядка.

**Числовой ряд.** (10 час. лекц.). Определение. Сходящийся ряд. Сумма ряда. Остаток ряда. Основные свойства. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Коммутативность абсолютно сходящегося ряда. Признаки сходимости знакопостоянного (сравнения, Коши, Даламбера) и знакопеременного (Лейбница) ряда. Нормированное пространство. Метрика, порожденная нормой. Ряды в нормированном пространстве.

**Элементы теории меры.** (14 час. лекц.). Основные множества множеств (полукольцо, кольцо, сигма-алгебра). Отображения множеств (действительные отображения из множества множеств). Счётная аддитивность отображения множеств. Мера. Пространство с мерой. Множество, измеримое относительно меры. Теорема о продолжении меры. Полная мера. Построение и основные свойства меры Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n$. Существование множеств, неизмеримых относительно меры Лебега.

*Мера Лебега-Стилтьеса в $\mathbb{R}^n$. Вероятностная мера.

**Измеримое отображение.** (6 час. лекц.). Определение и основные свойства. Измеримость композиции. Измеримость и непрерывность. Понятие “почти всюду”. Сходимость по мере последовательности отображений (функциональной последовательности).

**Интеграл Лебега**. (8 час. лекц.). Полная конструкция интеграла Лебега от измеримого отображения: аппроксимация области определения множествами конечной меры, представление отображения в виде разности двух неотрицательных, построение срезок для неограниченного неотрицательного отображения, построение интегральных сумм Лебега для ограниченного неотрицательного отображения на множестве конечной меры, нахождение пределов соответствующим образом построенных числовых последовательностей. Существование интеграла Лебега от ограниченного измеримого отображения по множеству конечной меры. Основные свойства интеграла Лебега: линейность, счетная аддитивность, абсолютная непрерывность, существование интеграла Лебега от отображения и существование интеграла Лебега от модуля отображения, связь между этими интегралами Лебега и другие свойства. Сходимость по мере последовательности отображений. Теорема Лебега о почленном интегрировании. Интеграл Лебега от конкретных степенных отображений.

**Определенный интеграл**. (8 час. лекц.). Определение. Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении. Существование первообразной для непрерывного отображения. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям. Интегральный признак сходимости числового ряда. Геометрический смысл определённого интеграла. Связь определённого интеграла с интегралом Римана.

*Интеграл Римана.

**Кратный интеграл**. (10 час. лекц.). Определение. Свойства кратного интеграла. Теорема Фубини. Частные случаи (криволинейная трапеция, криволинейный параллелепипед). Замена переменной в кратном интеграле. Частные случаи (переход к полярным координатам в двойном интеграле, переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле).

**Несобственный интеграл.** (6 час. лекц.). Определение несобственного интеграла Лебега. Признаки существования несобственного интеграла. Связь с рядами.

Несобственные интегралы Римана.

*Различные подходы к понятию несобственного интеграла.

**Некоторые дополнения**. (16 час. лекц.). Невырожденное непрерывно-дифференцируемое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Геометрический смысл якобиана (определителя производной матрицы). Обобщенная мера. Некоторые свойства обобщённой меры. Интеграл Лебега по обобщенной мере. Теорема Радона–Никодима. Производная от меры по другой мере.

**Последовательность отображений**. **Ряд отображений.** (28 час. лекц.). Поточечная и равномерная сходимости последовательности отображений из произвольного множества в метрическое пространство. Поточечная и равномерная сходимости ряда отображений из произвольного множества в нормированное пространство. Теоремы о почленном предельном переходе, непрерывности предельного отображения и суммы. Почленное дифференцирование и интегрирование последовательности и ряда числовых отображений. Сходимость почти всюду. Связь между различными типами сходимостей.

Степенной ряд с комплексными членами. Теорема Абеля. Радиус и круг сходимости. Остаточный член формулы Тейлора для числового отображения в разных формах. Ряд Тейлора. Разложение элементарных отображений в степенные ряды.

Тригонометрическая система. Ряд Фурье. Равномерная сходимость ряда Фурье. Признаки сходимости ряда Фурье в точке. Принцип локализации. Сходимость в среднем. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывного отображения тригонометрическими многочленами и степенными многочленами. Улучшение сходимости ряда Фурье (частичные суммы Чезаро).

**Интегрирование на многообразии**. (30 час. лекц.). Определение многообразия в $\mathbb{R}^n$. Край многообразия. Многообразие с краем. Многообразие без края. Гладкое многообразие. Ориентация многообразия. Согласованная ориентация многообразия и края. Отображение из множества на многообразии в $\mathbb{R}^p$. Меры на многообразии. Многообразие как пространство с мерой. Интеграл по множеству на многообразии. Криволинейный и поверхностный интегралы первого и второго рода.

Теорема Стокса. Частные случаи теоремы Стокса. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в $\mathbb{R}^n$. Элементы теории поля: градиент, поток, расходимость, циркуляция, вихрь. Векторная интерпретация формул Грина, Остроградского и Стокса.

*Понятие о дифференциальных формах и их интегрирование.

**Исследование отображения**. (16 час. лекц.). Общая схема исследования числового отображения. Асимптоты. Выпуклые отображения. Способы задания числового отображения (обзор): явное, неявное, параметрическое, с помощью последовательности отображений, с помощью ряда отображений, с помощью первообразной, с помощью интеграла Лебега и другие. Интеграл Лебега, зависящий от параметра. Дифференцирование и интегрирование отображения, заданного интегралом Лебега, зависящим от параметра. Равномерная сходимость интеграла Лебега, зависящего от параметра. Бета- и Гамма-отображения Эйлера.

*Другие специальные отображения.

Программу для потока 2007 года составил доцент С.А. Копанев

## Краткая программа курса “**Математический анализ**” для потока 2006 года

**Введение.** Особенности преподавания математических курсов в университете. Ведение конспекта лекций. Практические занятия. Просеминары. Математические кружки. Коллоквиумы, консультации, контрольные точки, индивидуальные задания. Работа с литературой. Зачеты и экзамены.

1. **Метод математической индукции.** Теорема о математической индукции. Примеры.

**2. Элементы теории множеств.** Понятие множества. Отношение принадлежности. Подмножества и надмножества. Равенство множеств. Примеры множеств: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел. Способы задания множеств. Действия над множествами: объединение, пересечение, разность множеств. Дополнение множества. Теорема де Моргана.

**3. Вещественные числа.** Вещественные числа как бесконечные десятичные дроби. Представление рационального и иррационального числа в виде десятичной дроби. Поле вещественных чисел. Порядок в поле вещественных чисел. Согласованность порядка в $\mathbb{R}$ с алгебраическими операциями. Отрезки вещественной оси. Сечения в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Теорема Дедекинда о полноте $\mathbb{R}$.

**4. Отображения и функции.** Декартово произведение множеств. Отображение, область определения. Множество значений. График отображения. Образы и прообразы множеств при заданном отображении. Семейства множеств. Объединение и пересечение семейства множеств. Свойства прообразов. Биекция, инъекция, сюръекция.

**5**. **Границы числовых множеств.** Супремум, инфимум. Теорема Больцано.

**6. Открытые и замкнутые множества на прямой.** $\varepsilon$-Окрестность точки на прямой. Открытые множества на прямой, их свойства. Внутренность множества. Предельные точки множества, изолированные точки. Замкнутые множества, их свойства. Граница множества. Дополнения замкнутого и открытого множеств. Замыкание множества.

**7. Последовательности вещественных чисел**. Предел последовательности. Теорема о единственности предела последовательности. Лемма о вложенных промежутках. Теорема Больцано о предельной точке множества. Теорема Больцано–Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Монотонные последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Пределы последовательностей и бесконечно малые. Операции над последовательностями. Предельный переход в неравенстве. Первый замечательный предел (дискретный случай). Второй замечательный предел (дискретный случай).

**8. Предел и непрерывность функции.** Предел функции по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Предел композиции функций. Первый замечательный предел для случая непрерывного аргумента. Второй замечательный предел для случая непрерывного аргумента. Непрерывность функции. Критерий непрерывности функции. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Таблицы эквивалентных бесконечно малых. Использование бесконечно малых при вычислении пределов. Композиция непрерывных функций. Образ отрезка при непрерывном отображении. Непрерывность обратной функции. Действия над непрерывными функциями. Односторонние пределы функции. Точки разрыва функции, их классификация. Теорема Коши о промежуточных значениях.

**9. Элементарные функции.** Основные элементарные функции. Показательная функция. Логарифмическая функция. Тригонометрические функции. Степенная функция с произвольным вещественным показателем. Понятие о функции многих переменных. Многочлены и дробно-рациональные функции. Определение элементарной функции. Теорема о непрерывности элементарной функции.

**10. Непрерывные вещественные функции.** Первая теорема Вейерштрасса. Вторая теорема Вейерштрасса. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

**11. Дифференциальное исчисление действительных функций действительного переменного.** Задача об аппроксимации действительной функции линейной функцией. Дифференциал функции. Определение дифференциала. Дифференциал и производная. Геометрический смысл дифференциала и производной. Дифференцируемость и непрерывность. Односторонняя дифференцируемость. Вычисление производных. Производные показательной и тригонометрических функций. Дифференцирование суммы, произведения, частного функций. Дифференцирование композиции. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференцирование обратной функции. Производные логарифмической функции, обратных тригонометрических функций и гиперболических функций. Основные теоремы дифференциального исчисления. Точки экстремума. Теоремы Ферма, Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Физический смысл производной. Производные высших порядков. Параметрическое задание функций. Дифференцирование параметрически заданной функции. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**12. Исследование функций и построение графиков**. Точки экстремума. Достаточные условия экстремума. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты. Отыскание асимптот. Общая схема исследования функции и построения графика.

**13. Неопределенный интеграл.** Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование простейших рациональных дробей. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших. Методы разыскания коэффициентов в разложении дроби на простейшие. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная подстановка. Интегрирование иррациональностей. Дифференциальный бином.

**14.** $\mathbb{R}^n$ **и метрические пространства.** Пространство $\mathbb{R}^n$. Метрика в этом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского. Понятие метрического пространства. Примеры. Пространство $C[a,b]$. Окрестности в метрическом пространстве. Внутренние, граничные, предельные точки множества в метрическом пространстве. Граница множества. Открытые множества, их свойства. Замкнутые множества, их свойства. Замыкание множества. Производное множество. Подпространства метрического пространства. Предел последовательности в метрическом пространстве. Лемма о вложенных промежутках в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано о предельной точке множества в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано–Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности в $\mathbb{R}^n$. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$. Лемма Гейне–Бореля. Компактные множества в метрическом пространстве. Компактные множества в $\mathbb{R}^n$. Компактные подмножества компактного множества.

**15. Ряды.** Числовые ряды. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд. Знакоположительные ряды. Признаки сравнения. Признаки Даламбера, Коши в предельной и непредельной форме. Условно и абсолютно сходящиеся числовые ряды. Коммутативное свойство абсолютно сходящегося ряда. Знакопеременные ряды. Признаки Дирихле, Абеля, Лейбница. Линейные нормированные пространства. Примеры.

**16. Функциональные последовательности и ряды.** Поточечная сходимость. Равномерная сходимость функциональной последовательности. Геометрическая интерпретация. Достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Язык последовательностей и язык рядов. Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Метрика в нормированном пространстве. Полные метрические пространства. Банаховы пространства. Условие Коши сходимости ряда в банаховом пространстве. Полнота $C[a,b]$.

**17. Элементы теории меры.** Основные брусы. Свойства множества основных брусов. Объем на множестве основных брусов. Счетная аддитивность объема на множестве основных брусов. Мера. Задача о продолжении меры. Сходимость в $C[a,b]$ и равномерная сходимость. Продолжение меры в $\mathbb{R}^n$. Измеримые множества. Алгебра множеств. Внешняя мера. σ-Алгебра измеримых множеств. σ-Алгебра множеств, измеримых по Лебегу.

**18. Измеримые функции.** Определение измеримой функции. Примеры. Свойства измеримых функций. Критерий непрерывности отображения. Измеримость композиции функций.

**19. Интеграл Лебега.** Задачи, приводящие к понятию интеграла. Суммы Лебега и их свойства. Интеграл Лебега и его свойства.

**20. Определенный интеграл.** Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Геометрический смысл определенного интеграла. Формула интегрирования по частям и замена переменной.

**21. Приложения определенного интеграла.** Некоторые физические приложения определенного интеграла. Геометрические приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах. Вычисление объемов тел вращения. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах. Непрерывные кривые. Гладкие кривые. Длина кривой. Длина гладкой кривой и ее вычисление в декартовых координатах. Вычисление длины кривой в полярных координатах.

**22. Интеграл Римана и интеграл Лебега.** Интеграл Римана. Суммы Римана. Интеграл Лебега и интеграл Римана. Пример функции, интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману. Сравнение сумм Лебега и Римана.

**23. Непрерывные функции на компакте.** Теоремы Вейерштрасса и Кантора. Образ компакта при непрерывном отображении. Теорема об обратном отображении.

**24. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей.** Сходимость по мере. Сходимость почти везде. Мера предела монотонной последовательности множеств. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти везде.

**25. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.**

**26. Степенные ряды.** Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряд Тейлора и формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме и в форме Лагранжа. Достаточные условия сходимости ряда Тейлора данной функции к этой функции. Ряды Тейлора некоторых элементарных функций.

**27. Дифференциальное исчисление отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.** Основные понятия дифференциального исчисления. Дифференциал функции. Некоторые сведения из линейной алгебры. Матрица Якоби (производная матрица). Частные производные. Вычисление производной матрицы. Дифференцирование композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Свойства дифференциала. Вычисление частных производных от композиции функций. Необходимые условия дифференцируемости отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^1$. Достаточные условия дифференцируемости отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^1$. Норма линейного оператора. Отрезок прямой в линейном пространстве. Теорема о конечных приращениях. Теорема о равенстве смешанных производных.

**28. Ряд Тейлора и дифференциалы высших порядков для отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$ и отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.** Экстремумы действительной функции нескольких переменных. Необходимые условия. Достаточные условия.

**29. Непрерывно дифференцируемые отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.** Якобиан отображения. Регулярные отображения. Теорема об открытом отображении. Теорема об обратном отображении для дифференцируемого отображения. Неявное задание функции. Формулировка и доказательство теоремы о неявной функции для вещественной функции вещественного аргумента. Формулировка и обсуждение теоремы в общем случае. Условный экстремум вещественной функции многих переменных. Достаточные условия условного экстремума (метод множителей Лагранжа). Мера образа множества при линейном отображении. Геометрический смысл определителя матрицы линейного отображения. Свойства линейного отображения и локальные свойства дифференцируемого отображения. Геометрический смысл якобиана. Теорема Сарда.

**30. Кратные интегралы.** Выражение меры множества в $\mathbb{R}^n$ через меру его сечения. Теорема Фубини. Вычисление кратных интегралов. Интегрирование по мере, выраженной через интеграл. Дифференцирование меры. Образ измеримого по Лебегу множества при непрерывно дифференцируемом отображении. Мера образа множества при непрерывно дифференцируемом отображении. Замена переменных в интеграле Лебега. Переход к полярным координатам. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле.

**31. Многообразия в $\mathbb{R}^n$.** Определение многообразия в $\mathbb{R}^n$. Примеры. Локальные системы координат на многообразии. Карты, атлас. Примеры. Многообразия с гладким краем. Касательное пространство и касательное многообразие. Касательная прямая к кривой. Касательная плоскость к поверхности. Ориентация конечномерного векторного пространства. Ориентация окрестности многообразия. Ориентация многообразия. Ориентация поверхности и кривой в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

**32. Внешние дифференциальные формы.** Внешние формы на многообразии (каноническое представление). Интегрирование внешних форм. Интегрирование внешних форм по кривым и поверхностям в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Дифференцирование внешних форм.

**33. Формула Стокса.** Разбиение единицы на многообразии. Ориентация многообразия и ориентация его края. Формула Стокса. Следствия из формулы Стокса. Формула Гаусса–Остроградского. Поток вектора. Дивергенция. Работа силы. Циркуляция. Градиент и производная по направлению. Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$. Ротор. Формула Грина.

**34.** Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Интеграл по длине кривой. Различные формы записи формулы Стокса. Площадь поверхности. Интеграл по площади поверхности. Различные формы записи формул Гаусса–Остроградского и Стокса.

**35. Ряды Фурье.** Ортогональные системы функций. Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье и коэффициенты Фурье. Интеграл Дирихле. Сходимость ряда Фурье в точке. Теорема Римана. Теорема о локализации. Теорема Дирихле–Жордана. Суммы Чезаро. Теорема Фейера. Разложение функции в ряд по синусам и косинусам. Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции.

**36. Несобственные интегралы и интеграл Фурье.** Интеграл от неограниченной измеримой функции по конечному промежутку. Интеграл по неограниченному промежутку. Вычисление несобственных интегралов. Примеры. Несобственные интегралы и ряды. Несобственные интегралы от положительных функций и знакоположительные ряды. Признаки сравнения. Интегральный признак сходимости знакоположительного числового ряда. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. Условно сходящиеся несобственные интегралы и условно сходящиеся числовые ряды. Признаки сходимости. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов. Представление функций в виде интеграла Фурье. Различные виды записи формулы Фурье. Преобразование Фурье.

*Программу для потока 2006 года составил профессор Г.Г. Пестов*

## Список трудов Н. Бурбаки, изданных на русском языке


1. Бурбаки Н. Элементы математики. Очерки по истории математики. – М.: Изд. иностр. лит., 1963. – 292 с.
2. Бурбаки Н.Начала математики. Ч. 1. Основные структуры анализа. Кн.1. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
3. Бурбаки Н. Элементы математики. Кн. 2. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.
4. Бурбаки Н. Элементы математики. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. – М.: Наука, 1965. – 303 с.
5. Бурбаки Н. Элементы математики. Алгебра. Модули, кольца, формы. – М.: Наука, 1966. – 555 с.
6. Бурбаки Н. Элементы математики. Алгебра. – М.: Наука, 1987. – 182 с.
7. Бурбаки Н. Элементы математики. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
8. Бурбаки Н. Элементы математики. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. – М.: Наука, 1969. – 393 с.
9. Бурбаки Н. Элементы математики. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
10. Бурбаки Н. Элементы математики. Функции действительного переменного. Элементарная теория. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
11. Бурбаки Н. Элементы математики. Топологические векторные пространства. – М.: Изд. иностр. лит., 1959. – 410 с.
12. Бурбаки Н. Элементы математики. Меры. Интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
13. Бурбаки Н. Элементы математики. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М.: Наука, 1977. – 600с.
14. Бурбаки Н. Элементы математики. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. – М.: Наука, 1970. – 320 с.

15. Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли: алгебры Ли, свободные алгебры Ли, группы Ли. – М.: Мир, 1976. – 496 с.
16. Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. – М.: Мир, 1972. – 331 с.
17. Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли: подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепленные полупростые алгебры Ли. – М.: Мир, 1978. – 342 с.
18. Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Компактные вещественные группы Ли. – М.: Мир, 1986. – 173 с.
19. Бурбаки Н. Элементы математики. Коммутативная алгебра. – М.: Мир, 1971. – 707 с.
20. Бурбаки Н. Элементы математики. Спектральная теория. – М.: Мир, 1972. – 183 с.
21. Бурбаки Н. Элементы математики. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. – М.: Мир, 1975. – 220 с.

## Алфавит

| ЛАТИНСКИЙ | |
|---|---|
| Начертание | Произношение |
| **A a** ***A a*** | а |
| **B b** ***B b*** | бэ |
| **C c** ***C c*** | цэ |
| **D d** ***D d*** | дэ |
| **E e** ***E e*** | е |
| **F f** ***F f*** | эф |
| **G g** ***G g*** | же |
| **H h** ***H h*** | аш |
| **I i** ***I i*** | и |
| **J j** ***J j*** | жи |
| **K k** ***K k*** | ка |
| **L l** ***L l*** | эль |
| **M m** ***M m*** | эм |
| **N n** ***N n*** | эн |
| **O o** ***O o*** | о |
| **P p** ***P p*** | пэ |
| **Q q** ***Q q*** | ку |
| **R r** ***R r*** | эр |
| **S s** ***S s*** | эс |
| **T t** ***T t*** | тэ |
| **U u** ***U u*** | у |
| **V v** ***V v*** | вэ |
| **W w** ***W w*** | дубль-вэ |
| **X x** ***X x*** | икс |
| **Y y** ***Y y*** | игрек |
| **Z z** ***Z z*** | зэт |
| Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо “жи” иногда говорят “йот”). | |

| ГРЕЧЕСКИЙ | |
|---|---|
| Начертание | Произношение |
| **Α α** | альфа |
| **Β β** | бета |
| **Γ γ** | гамма |
| **Δ δ** | дельта |
| **Ε ε** | эпсилон |
| **Ζ ζ** | дзета |
| **Η η** | эта |
| **Θ θ ϑ** | тэта |
| **Ι ι** | йота |
| **Κ κ** | каппа |
| **Λ λ** | лямбда |
| **Μ μ** | мю |
| **Ν ν** | ню |
| **Ξ ξ** | кси |
| **Ο ο** | омикрон |
| **Π π** | пи |
| **Ρ ρ** | ро |
| **Σ σ Τ** | сигма |
| **Τ τ** | тау |
| **Υ υ** | ипсилон |
| **Φ φ ϕ** | фи |
| **Χ χ** | хи |
| **Ψ ψ** | пси |
| **Ω ω** | омега |
| Наряду с указанным произношением также говорят “ламбда”, “ми”, “ни”. | |

## Для заметок