

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ



ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В.Н. Берцун**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ГРАФАХ**

Часть 1

*Учебное пособие*



Томск – 2006

УДК 519.17  
ББК 22.174  
Б 527

**Берцун В.Н.** Математическое моделирование на графах.  
**Б 527** Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. –  
88 с.

ISBN 5-89503-312-1

Учебное пособие предназначено для студентов механико-математических и физико-математических факультетов университетов. Оно также может быть полезно студентам других специальностей и аспирантам, занимающимся математическим моделированием прикладных задач и оптимизацией вычислительных алгоритмов для высокопроизводительных компьютеров (кластеров).

В части 1 пособия содержится два раздела теории графов, приведён необходимый теоретический материал, а также включены задачи для самостоятельного выполнения.

**УДК 519.17**  
**ББК 22.174**

**Рецензент:**

**доктор физико-математических наук А.В. Старченко**

ISBN 5-89503-312-1

© В.Н. Берцун, 2006  
© Томский госуниверситет, 2006

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава 1. <b>Основные понятия теории графов</b> .....	5
1.1. Из истории теории графов .....	5
1.2. Граф и его дополнение .....	6
1.3. Маршрут в графе, цикл, связность .....	12
1.4. Компоненты связности графа .....	16
1.5. Изоморфизм графов .....	18
1.6. Двудольные графы и их свойства .....	20
1.7. Ориентированные графы .....	23
1.8. Деревья и их свойства .....	28
1.9. Ациклические графы .....	38
<i>Задачи</i> .....	44
Глава 2. <b>Плоские и планарные графы</b> .....	48
2.1. Свойства плоского графа .....	48
2.2. Эйлеровы графы .....	53
2.3. Гамильтоновы графы .....	57
2.4. Гиперкуб и его свойства .....	61
2.5. Графы сеточных функций .....	63
<i>Задачи</i> .....	73
ЛИТЕРАТУРА .....	76
БИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ .....	80

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время компьютерное моделирование резко расширило сферу своего применения в различных областях знаний. Это относится и к теории графов – разделу прикладной математики, который нашёл своё применение: в теории игр и квантовой химии, экономике и политике, логистике и социологии, биологии и медицине, оптимальном управлении и навигации, создании сложных программных комплексов и анализе современных компьютерных систем на основе сетей Петри [1 – 7]. Свойства графов активно используются и для решения краевых задач на сетевых системах (нефтепроводах, газопроводах, электросетях и т.д.), в решении сложных задач на многопроцессорных вычислительных системах (МВС). Граф алгоритма позволяет получить представление о том, как распространяется и преобразуется информация при его реализации [8, 9], что особенно важно для оптимизации параллельных вычислительных алгоритмов. Перспективным направлением решения сложных задач теории графов являются имитационные методы, основанные на природных механизмах принятия решений (клеточных автоматах, муравьиных алгоритмах, генетических алгоритмах и др.) [10].

## Глава 2

### ПЛОСКИЕ И ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

#### 2.1. Свойства плоского графа

При изготовлении различных технических устройств (микросхем, транспортных сетей без пересечений и др.) важно знать, существует ли изоморфное представление соответствующего графа на плоскости (решение задачи), удовлетворяющее определенным технологическим требованиям.

Граф  $G$  называется *плоским*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели общих точек, кроме их общей вершины. Граф называется *планарным*, если он изоморфен плоскому графу (допускает плоскую укладку). На рис. 2.1 изображены планарный и плоские графы [3, 11].

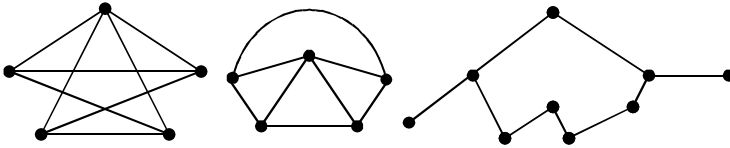


Рис. 2.1

Очевидно, что плоскими графами являются: простые циклы, деревья, лес, географическая карта (без островных государств).

*Гранью* в плоском представлении графа  $G$  называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой, не пересекающей ребра графа. Длина цикла, ограничивающего грань плоского графа, называется *степенью грани*. Две грани называются соседними, если

они имеют хотя бы одно общее ребро. В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную вне плоского графа. Такую плоскость называют *бесконечной* или *внешней гранью*. Грань может содержать дерево. На рис. 2.2 изображена бесконечная грань. Примеры граней приведены на рис. 2.3.

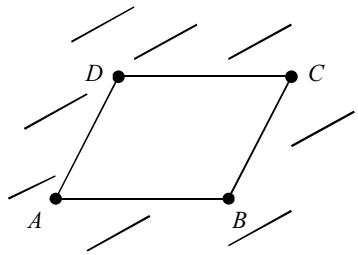
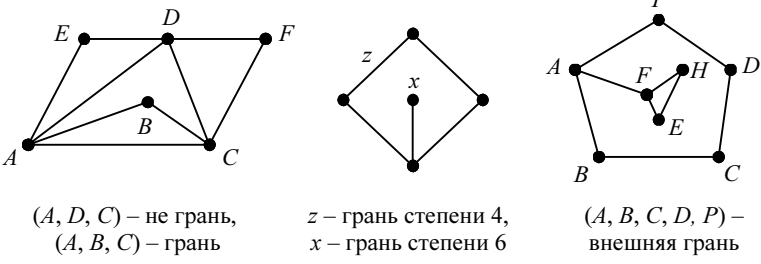


Рис. 2.2



$(A, D, C)$  – не грань,  $(A, B, C)$  – грань  
 $z$  – грань степени 4,  $x$  – грань степени 6  
 $(A, B, C, D, P)$  – внешняя грань

Рис. 2.3

**Утверждение 2.1 (формула Эйлера).** Если плоский связный граф имеет  $n$  вершин,  $m$  ребер и  $f$  граней, то

$$n - m + f = 2. \tag{1}$$

**Доказательство.** Рассмотрим плоский связный граф. Преобразуем его в дерево, содержащее все его вершины. Для этого будем удалять те ребра, которые разомкнут простые циклы (см., например, рис. 2.4).

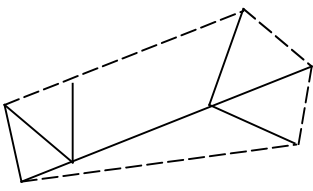


Рис. 2.4

Тогда получится граф без перегородок и связный. Каждое удаление ребра уменьшает число граней на 1, так как замыкается простой цикл либо из двух циклов образуется один. Таким образом, разность  $m - f$  сохраняется. В полученном дереве пусть  $n_1$  – число вершин,  $m_1$  – число ребер,  $f_1$  – число граней. Тогда  $m - f = m_1 - f_1 = m_1 - 1$ , так как в дереве одна грань. По опреде-

лению в полученном дереве число вершин сохраняется, тогда  $n = n_1$ . Но дерево с  $n$  вершинами имеет  $n - 1$  ребро. Тогда  $m_1 = n - 1$ . Поэтому  $m - f = m_1 - 1 = n - 2$  или  $n - m + f = 2$ . ■

Ответ на вопрос о том, является ли данный граф плоским, очень часто не является очевидным и требует дополнительного анализа графа. Рассмотрим, например, задачу о трех домах и трех колодцах.

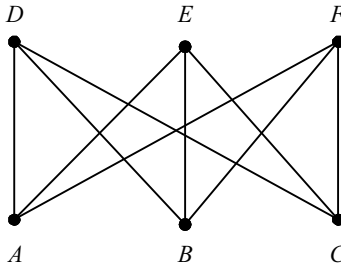


Рис. 2.5

Пусть имеется 3 дома и 3 колодца. От каждого дома к каждому колодцу идет тропинка. Можно ли проложить тропинки так, чтобы они не пересекались? Решение задачи сводится к определению того, является ли полный двудольный граф  $K_{3,3}$  на рис. 2.5 плоским. Допустим, что он является плоским [34 – 37]. Для этого графа  $n = 6$ ,  $m = 9$  и из формулы (1) получим

$$f = 2 + 9 - 6 = 5.$$

Отметим, что у двудольного графа  $K_{3,3}$  нет простых циклов длины 3, т.е. граница любой грани в плоском представлении содержит не менее четырех ребер. Тогда число граней

$$f = f_4 + f_5 + f_6 + \dots, \quad (2)$$

где  $f_i$  – число граней, ограниченных  $i$  ребрами. Но каждое ребро является границей двух граней (с учетом внешней грани), поэтому всего граней не больше  $2m$ . С другой стороны, удвоенное число ребер можно вычислить через количество ребер в гранях

$$2m = 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots \quad (3)$$

С учетом (2), можно записать

$$4f = 4f_4 + 4f_5 + 4f_6 + \dots \quad (4)$$

Тогда  $4f \leq 2m$  или  $2f \leq m$ . Но для  $m = 9, f = 5$  получим, что  $10 \leq 9$ . Таким образом, граф  $K_{3,3}$  не плоский. Аналогичным образом можно показать, что полный граф с пятью вершинами  $K_5$ , имеющий простые циклы длины 3, не плоский. Следовательно, имеется 2 типа не плоских графов: тип I – граф  $K_{3,3}$ , тип II – граф  $K_5$ . ■

По критерию Понтрягина – Куратовского *необходимое и достаточное условие, при котором граф  $G$  является планарным, состоит в том, что граф не должен содержать подграфов типа I и типа II* [15].

Для проверки планарности графа с  $n$  вершинами по этому критерию необходимо рассмотреть  $C_n^5$  графов с пятью вершинами и  $C_n^6$  графов с шестью вершинами.

Рассмотрим плоский граф  $G$  на рис. 2.6. Если добавить к нему два ребра (штриховые линии), то он останется плоским.

Плоский граф называется *максимально плоским* если невозможно добавить к нему ни одного ребра так, чтобы новый граф был бы плоским. Каждая грань в максимально плоском графе имеет 3 вершины, поэтому максимально плоский граф называется *триангулированным* и имеет ровно 3 внешних ребра.

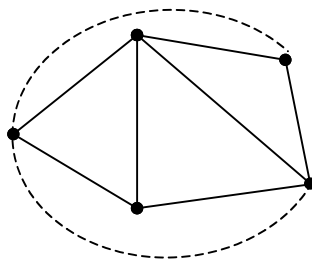


Рис. 2.6

**Утверждение 2.2.** Для любого планарного графа  $G$  существует плоская укладка, в которой все ребра – прямолинейные отрезки.

*Доказательство.* Будем рассматривать общий случай – максимально плоских графов. Для  $n < 4$  утверждение очевидно. Если  $n = 4$ , то четвертая вершина  $A$  может находиться либо внутри грани (см. рис. 2.7, а), либо вне ее, но тогда существует граф с прямолинейными отрезками, изображенный на рис. 2.7, в.

Пусть теорема верна для максимально плоского графа с  $n$  вершинами  $A_i$ , соединенными прямолинейными отрезками. Добавим еще одну вершину  $A_{n+1}$ . Так как граф триангулирован, то эта вершина на-



ходится либо внутри одной из треугольных граней либо вне ее, как на рис. 2.7, в. ■

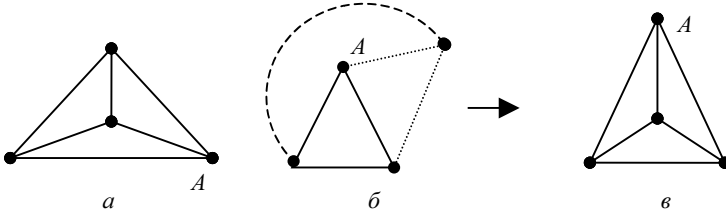


Рис. 2.7

**Следствие из формулы Эйлера.** Плоский граф с числом вершин  $n \geq 3$  имеет не более  $3n - 6$  ребер. Триангулированный граф с  $n$  вершинами имеет  $3n - 6$  ребер.

*Доказательство.* Каждая грань графа ограничена не менее тремя ребрами, а каждое ребро является границей не более двух граней, тогда  $3f \leq 2m$ . Но из (1) следует, что

$$2 = n - m + f \leq n - m + 2m/3 \Rightarrow m \leq 3n - 6. \blacksquare$$

Отметим, что для плоского графа со степенями граней не меньше четырех имеет место оценка  $m \leq 2n - 4$ .

Рассмотрим выпуклый многоугольник, ограниченный, например, простым циклом  $C_5$ . На рис. 2.8 представлены примеры его триангуляции непересекающимися диагоналями.

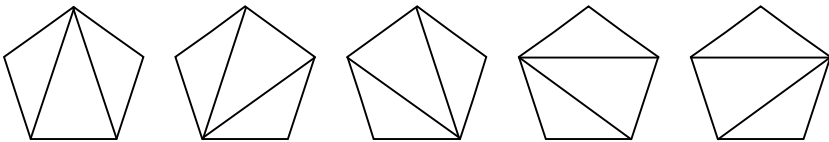


Рис. 2.8

Эйлер получил, что количество вариантов триангуляции  $L_n$  выпуклого многоугольника с  $n$  вершинами ( $n > 3$ ) его непересекающимися диагоналями находится в последовательности Каталана [38]

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \dots,$$

где  $a_1 = 1, a_n = (2n)! / [n!(n+1)!], n > 1, L_n = a_{n-2}$ .

Кэли установил, что числа Каталана перечисляют все плоские корневые кубические деревья, которые порождает триангуляция многоугольника его непересекающимися диагоналями.

Формула (1) получена Эйлером в 1758 г. для связного выпуклого многогранника в трехмерном пространстве с  $n$  вершинами,  $m$  ребрами и  $f$  гранями. Выпуклый многогранник можно представить на сфере, центр которой находится внутри его, таким образом, что никакие 2 ребра не пересекаются в точках, отличных от вершины. Стереографическая проекция такого графа является связным плоским графом [35]. Формула (1), отражающая фундаментальные свойства трехмерного пространства, не связана с расстоянием и углами, она стала основой для двух математических дисциплин – топологии и теории графов [34]. Известно, что существует только 5 правильных многогранников (пять Платоновых тел), плоские графы которых изображены на рис. 2.9.

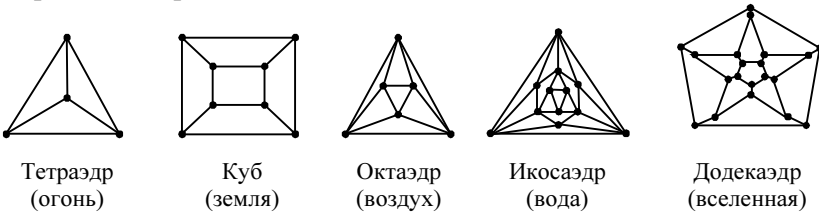


Рис. 2.9

Если на ребра планарного (или непланарного) графа нанести произвольное число вершин степени 2, то полученный граф останется планарным (непланарным). Свойство планарности графа позволяет упростить, например, изготовление электронных схем по технологии напыления, создавать транспортные сети с минимальным числом пересечений.

## 2.2. Эйлеровы графы

Можно ли нарисовать графы, изображенные на рис. 2.10, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по каждому ребру более одного раза? Очевидно, что это можно сделать не для любого из этих графов [1 – 4].

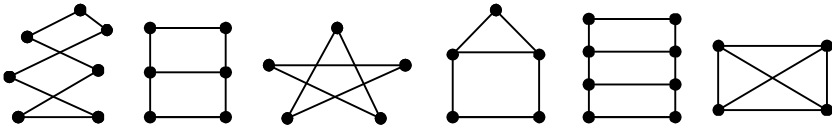


Рис. 2.10

*Эйлеровой цепью* (в цепи ребро не встречается дважды) в графе называется цепь, содержащая все ребра графа. *Эйлеровым циклом* называется цикл, содержащий все ребра графа в точности один раз. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется *эйлеровым графом*.

**Утверждение 2.3.** Если граф  $G$  обладает эйлеровым циклом, то он связный и все его вершины имеют четную степень.

*Доказательство.* Связность графа следует из определения эйлерова цикла. В эйлеровом цикле каждое ребро встречается только один раз, а каждая вершина встречается  $k \geq 1$  раз (или  $k + 1$  раз, если это начальная и конечная вершины цикла, которые совпадают). Поэтому все вершины графа должны иметь четную степень  $2k$ . ■

**Утверждение 2.4.** В графе  $G$  из всякого цикла можно выделить простой цикл.

*Доказательство.* Если длина цикла  $L = 1$ , то цикл есть петля и он прост. Пусть утверждение верно для всех графов с циклами длины до  $L - 1$ . Рассмотрим цикл длины  $L$ . Он либо простой, либо в нем есть вершины, повторяющиеся более одного раза. Цикл, существующий на таких вершинах, имеет длину меньше  $L$  и поэтому содержит простой цикл. ■

**Утверждение 2.5.** Если граф  $G$  связный и все его вершины имеют четную степень, то он обладает эйлеровым циклом.

*Доказательство.* Для петли, состоящей из одного ребра, эйлеров цикл существует. Допустим, что у связных графов с числом ребер  $\leq t - 1$  есть эйлеров цикл. У графа  $G$  с  $t$  ребрами четные степени вершин, поэтому он имеет хотя бы один простой цикл  $C$ . Если этот цикл содержит все ребра графа  $G$ , то  $C$  – эйлеров цикл. Если  $C$  не эйлеров цикл, то удалив из  $G$  все ребра цикла  $C$ , получим суграф  $G_1$ . В таком суграфе каждая компонента связности является либо изоли-

рованной вершиной, либо эйлеровым графом с четными степенями вершин и числом ребер меньшим  $t$ . В этом случае эйлеровым циклом связного графа  $G$  будет объединение простого цикла  $C$  с эйлеровыми циклами связных компонент подграфа  $G_1$ . ■

**Утверждение 2.6.** Связный граф  $G$  обладает эйлеровой цепью с концами  $A$  и  $B$  тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  единственные нечетные его вершины.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $G$  имеет эйлерову цепь  $(A, B)$ . Присоединим к этому графу новое ребро, соединяющее концы эйлеровой цепи. В полученном графе  $G_1$  степени всех вершин четные и, следовательно, существует эйлеров цикл. Тогда в графе  $G$  все вершины, кроме  $A$  и  $B$ , являются четными.

*Достаточность.* Пусть  $G$  связан и  $A, B$  – единственные его нечетные вершины. Соединив концы нечетных вершин, получим эйлеров граф  $G_1$ , в котором эйлеров цикл содержит вершины  $A$  и  $B$ . Если в этом цикле исключить дополнительное ребро, то получим эйлерову цепь. ■

Если граф  $G$  связный и имеет  $2k$  вершин нечетной степени, то в нем можно провести  $k$  различных цепей, содержащих все его ребра в совокупности ровно по одному разу [2, 36].

Рассмотрим пример. Пусть автобусная сеть имеет вид графа на рис. 2.11. Требуется найти минимальное число маршрутов, обеспечивающих проезд пассажиров из любого пункта в любой с пересадками или без них. Каждый автобус при этом должен двигаться по своему маршруту.

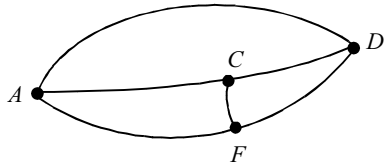


Рис. 2.11

*Решение.* Граф – не эйлеров, так как имеет 4 нечетные вершины. Поэтому в этом графе существует два маршрута (две различные цепи), например,  $ADFC$ ,  $DCAF$ . При решении прикладных задач (головоломки, лабиринты и др.) возникает проблема построения замкнутого маршрута из некоторой вершины  $A$ , содержащего все ребра графа дважды. Такие задачи приводят к необходимости рассмотрения соответствующих ориентированных графов. Орграф является эйлеро-

*вым*, если в нем есть контур, проходящий по каждой дуге этого графа в точности один раз. Известно [1 – 3], что:

- 1) связный орграф – эйлеров, если в каждой его вершине полустепень захода равна полустепени исхода;
- 2) если граф  $G$  – связный, то можно построить циклический маршрут, содержащий все его ребра в точности два раза, по одному разу в каждом из двух направлений.

Рассмотрим граф на рис. 2.12, *а*, в котором требуется найти замкнутый путь из вершины  $A$ , содержащий все ребра графа  $G$ , дважды по одному разу в каждом направлении.

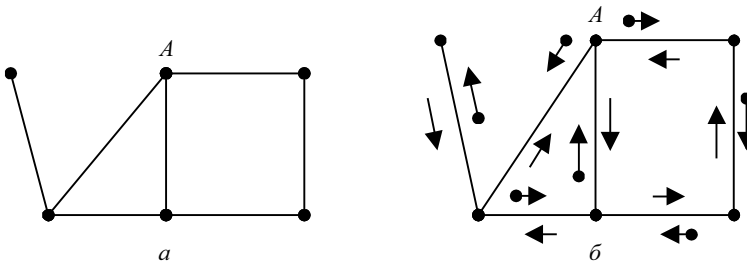


Рис. 2.12

Для этой цели используем правило Тарри для связного графа [1]. Из произвольной вершины  $A$  начинаем движение вдоль любого ребра. Ребро, по которому впервые приходим в вершину, отмечаем, например, стрелкой с точкой. Ребро, по которому впервые попали в вершину, используем для выхода, если нет других возможностей. Один из вариантов пути в этом случае представлен на рис. 2.12, *б*.

**Утверждение 2.7.** Почти нет эйлеровых графов [11].

**Доказательство.** Пусть  $G(n)$  – множество графов с  $n$  вершинами,  $\mathcal{E}(n)$  множество эйлеровых графов с  $n$  вершинами и мощностью  $|\mathcal{E}(n)|$ . Если  $\mathcal{E}'(n)$  – множество графов с  $n$  вершинами и четными степенями, тогда

$$\mathcal{E}'(n) \supset \mathcal{E}(n) \text{ и } |\mathcal{E}'(n)| \geq |\mathcal{E}(n)|.$$

В любом графе число вершин нечетной степени четно. Тогда любой граф из множества  $\mathcal{E}'(n)$  можно получить из некоторого графа

$G_{n-1}$  в множестве  $G(n-1)$ , если к нему добавить новую вершину и соединить ее со старыми вершинами нечетной степени. Поэтому  $|\mathcal{E}(n)| \leq |G(n-1)|$ . С другой стороны, число графов с  $n$  вершинами определяется через количество ребер в полном графе

$$|G(n)| = 2^q, \quad q = C(n, 2) = n(n-1)/2.$$

Учитывая, что  $C(k, 2) - C(k-1, 2) = k-1$ ,

получим

$$|\mathcal{E}(n)| \leq |\mathcal{E}(n-1)| \leq |G(n-1)| = 2^{C(n-1, 2)} = 2^{C(n, 2) - (n-1)} = |G(n)| \cdot 2^{-(n-1)}.$$

Тогда  $\delta = |\mathcal{E}(n)| / |G(n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  и  $\delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

т.е. почти нет эйлеровых графов. ■

Эйлеров цикл в эйлеровом графе можно найти, если пронумеровать ребра по алгоритму Флери [24]:

- выбираем произвольную вершину  $a$  и одно из инцидентных ребер  $(a, v)$ , которому присваиваем номер 1;
- зачеркиваем ребро  $(a, v)$  и переходим к вершине  $v$ ;
- продолжаем процесс, пока не будут занумерованы все ребра графа;
- мост выбираем только тогда, когда нет других возможностей.

Полученная последовательность ребер и определяет эйлеров цикл.

Отметим, что наличие эйлерова цикла в графах электрических, телефонных и железнодорожных линий позволяет оптимизировать их покомпонентное тестирование.

### 2.3. Гамильтоновы графы

Ирландский математик Вильям Гамильтон в 1857 г. предложил игру, названную «Кругосветное путешествие».

Пусть 20 городов расположены в вершинах правильного додекаэдра ( $n = 20$ ,  $m = 30$ ,  $f = 12$ ), моделирующего Землю и представленного на рис. 2.13. Необходимо пройти по рёбрам через все вершины додекаэдра (через все города) и вернуться в исходный пункт так, что ни в одну вершину нельзя заходить более одного раза.

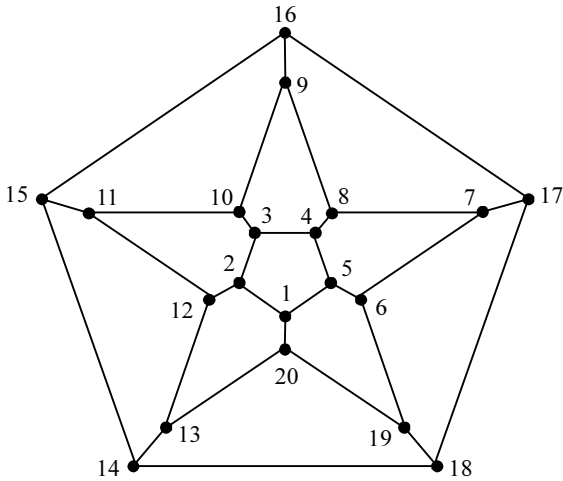


Рис. 2.13

*Гамильтоновым циклом* в графе  $G$  называется простой цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу. Граф, обладающий таким свойством, называется *гамильтоновым*. На рис. 2.14 изображены варианты гамильтоновых циклов и цепей.

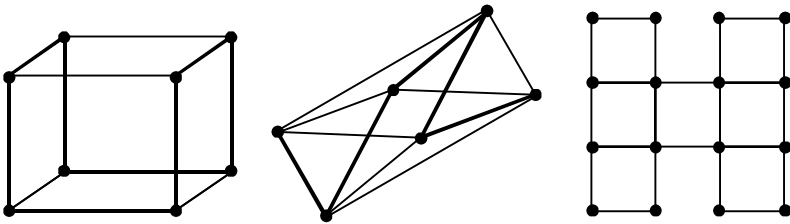


Рис. 2.14

Из этого рисунка следует, что гамильтонов цикл может не содержать всех рёбер графа.

К задаче Гамильтона близка задача о посыльном (коммивояжере), который должен посетить  $n$  городов, расстояния между которыми известны, и вернуться обратно, но так, чтобы в каждом городе побывать один раз, а цикл имел бы наименьшую длину. Очевидно, что

общему числу маршрутов тогда соответствует  $n!$  возможных перестановок вершин полного графа.

Пусть, например, четыре города связаны по схеме на рис. 2.15. Если движение начинается из города  $A$ , то общее число маршрутов  $(n - 1)! = 6$ .

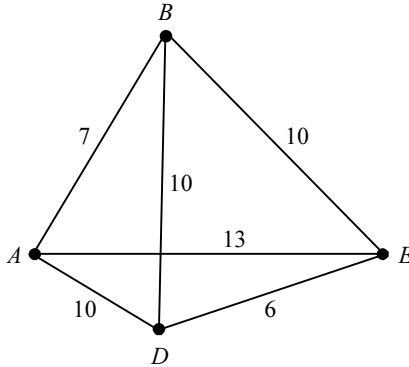


Рис. 2.15

Для решения задачи методом перебора можно построить граф-дерево. На рис. 2.16 представлен фрагмент такого графа, содержащий все шесть гамильтоновых циклов. Для рассматриваемой задачи один из самых коротких маршрутов  $S_{ABEDA} = 33$ , а один из самых длинных  $S_{AEBDA} = 43$ .

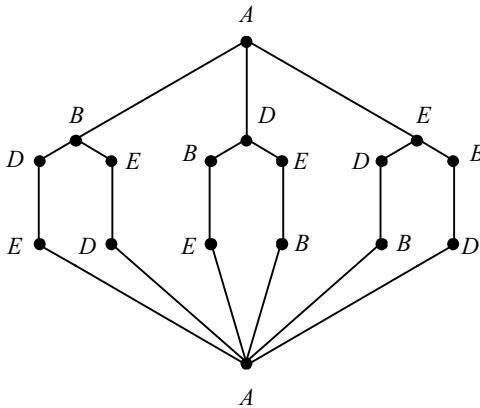


Рис. 2.16



В рассматриваемой задаче вес ребра  $c_{ij}$  (расстояние между вершинами  $i$  и  $j$ ) не зависит от направления обхода, поэтому существует только три различных гамильтоновых цикла. Если  $c_{ij} \neq c_{ji}$ , то такая задача коммивояжера называется *несимметричной*.

Метод полного перебора неэффективен даже для сравнительно небольших значений  $n$ , так как потребуется порядка  $O(n!)$  шагов. Так как  $n!$  с увеличением  $n$  растет быстрее, чем любой полином от  $n$  и даже быстрее  $2^n$ , то задача коммивояжера принадлежит к числу *NP – полных* задач [24]. Заметим, что, например, алгоритм Гаусса решения системы из  $n$  линейных уравнений имеет полиномиальную сложность с числом операций  $O(n^3)$ . Поэтому увеличение размерности системы в два раза увеличивает число операций на порядок. Иначе обстоит дело с определением гамильтонова цикла методом полного перебора. При увеличении числа вершин графа в два раза количество операций увеличивается более, чем в  $2^n$  раз. Поэтому негамильтоновость графа установить гораздо труднее, чем найти гамильтонов цикл.

Очевидно, что гамильтонов граф должен быть двусвязным, однако этого условия недостаточно.

*Тэта-графом* называется граф, содержащий только вершины степени 2 и две несмежные вершины степени 3.

Примеры таких двусвязных графов представлены на рис. 2.17.

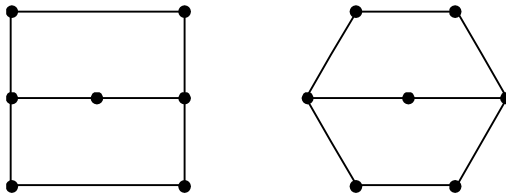


Рис. 2.17

Тэта-граф негамильтонов и имеет 3 простых попарно не пересекающихся цепи длины не менее двух.

Общего решения задачи о распознавании гамильтоновости графов, в отличие от эйлеровых графов, пока не найдено.

Справедливы следующие утверждения [11, 15]:

1. Каждый негамильтонов двусвязный граф содержит тэта-подграф.

2. Если  $|G| = n \geq 3$  и для любой его вершины  $u \in G$  степень  $v_u \geq n/2$ , то  $G$  – гамильтонов граф.

3. Если для любой пары  $u$  и  $w$  несмежных вершин графа  $G$  порядка  $n \geq 3$  выполняется неравенство  $v_u + v_w \geq n$ , то  $G$  – гамильтонов граф.

4. Всякий полный граф является гамильтоновым.

5. В гамильтоновом графе нет точек сочленения, т.е. гамильтонов граф неразделим.

6. В каждом турнире существует гамильтонов путь.

7. Сильно связный турнир является гамильтоновым оргграфом.

Отметим, что гамильтонов граф не обязательно является планарным.

В 1967 г. социолог С. Милграм предложил гипотезу «тесного (маленького) мира» («small world») – каждого человека можно связать с любым другим человеком на земном шаре цепочкой из шести знакомых [39]. Позднее эмпирически было доказано, что подобным свойством обладают структуры многих социальных технических систем. Например: электроэнергетические сети, WWW-сети, нейронные сети, сети научного сотрудничества и др.

Для описания растущей во времени структуры, обладающей свойством «тесного мира», и анализа ее стойкости можно использовать аппарат фрактальных графов.

## 2.4. Гиперкуб и его свойства

Рассмотрим два графа  $G_i(V_i, E_i)$ , ( $i = 1, 2$ ). Их *произведением* называется граф  $G(V, E)$ , вершины которого  $V(G) = V_1 \times V_2$  – декартово произведение множества вершин исходных графов. Множество ребер  $E(G)$  при этом определяется по правилу: вершины  $u = (u_1, u_2)$  и  $v = (v_1, v_2)$  – смежные в графе  $G \Leftrightarrow$ , когда или  $u_1 = v_1$ , а  $u_2, v_2$  смежные в  $G_2$ , или  $u_2 = v_2$  и  $u_1, v_1$  являются смежными в  $G_1$  [15]. При этом

$$|V| = |V_1| \cdot |V_2|, \quad |E| = |V_1| \cdot |E_2| + |V_2| \cdot |E_1|.$$

Например, на рис. 2.18 представлен граф  $G = G_1 \times G_2$ .

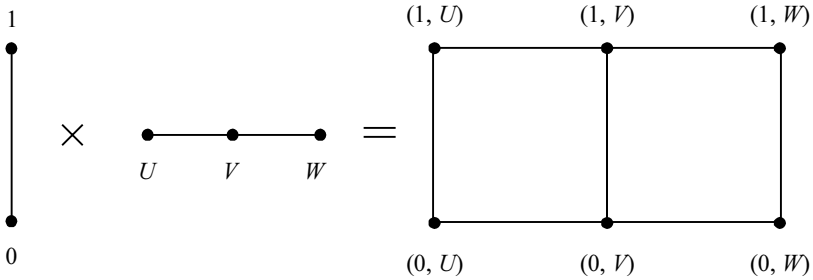


Рис. 2.18

С помощью операции произведения можно рекуррентно ввести важный класс графов –  $N$ -мерные гиперкубы  $\Gamma_N$

$$\Gamma_1 = K_2, \Gamma_2 = K_2 \times K_2, \Gamma_N = K_2 \times \Gamma_{N-1}, N > 1.$$

Число вершин в таком графе  $n = 2^N$ , число ребер  $m = N \cdot 2^{N-1}$ , а максимальное расстояние между узлами совпадает с  $N$ . При увеличении размерности гиперкуба на единицу количество вершин увеличивается в 2 раза, а максимальное расстояние между ними увеличивается только на 1. При этом  $\Gamma_N$  можно разделить на два гиперкуба размерности  $(N - 1)$ .

Гиперкубовая топология является одной из наиболее эффективных способов соединения процессоров в МВС и отличается от полного графа простотой реализации. В этом случае нумерацию процессоров можно задать в двоичной системе  $(0, 1)$  – векторами длины  $N$ , так, что номера соседних узлов будут отличаться только одним битом. Тогда два процессора имеют соединение, если двоичное представление их номеров отличается только одним битом. Например, на рис. 2.19 представлены графы  $\Gamma_N$  связи процессоров в виде гиперкуба для различных значений размерности  $N$ .

Известно, что передачу информации между узлами по кольцевой топологии (в выбранном направлении по кольцу) можно осуществить наиболее просто. Если в  $\Gamma_N$  необходимо осуществить циклический сдвиг информации, то удобно граф  $\Gamma_N$  отобразить на простой

цикл  $C_n$  ( $n = 2^N$ ) при помощи двоичного кода Грея [31, 33], как на рис. 2.20 для  $\Gamma_3$ .

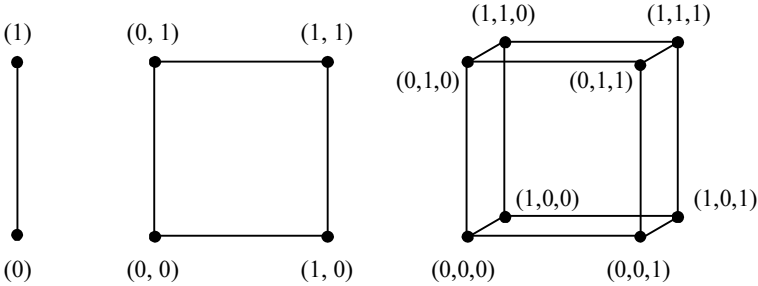


Рис. 2.19. Двоичная нумерация вершин гиперкуба

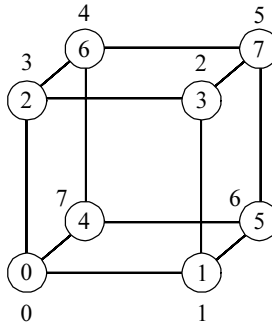


Рис. 2.20. Схема отображения  $\Gamma_3$  на  $C_8$   
(в кружках приведены номера процессоров гиперкуба)

При этом новая нумерация вершин определяет гамильтонов цикл, соседние вершины которого отображаются на соседние вершины в гиперкубе.

### 2.5. Графы сеточных функций

При решении различных прикладных задач часто требуется осуществлять восстановление некоторой функции  $f$  в замкнутой области  $D$  по известным ее экспериментальным значениям в  $n$  точках области  $D$ , либо строить в этой области нерегулярную адаптивную сетку

(граф) для решения краевой задачи, например, методом конечных объемов [40]. Значительный практический интерес представляет восстановление функции, заданной на линиях нерегулярной сетки, а также решение краевых задач на одномерных клеточных комплексах (теплопроводность в системе стержней, течение газа в трубопроводах и скважинах, неустановившиеся течения воды в системах речных русел и каналов и др.) [41 – 43]. Например, на рис. 2.21 представлен подграф одномерного клеточного комплекса, описывающий систему сосудов головного мозга человека, используемый в [44, 45] для математического моделирования работы сердечно-сосудистой системы.

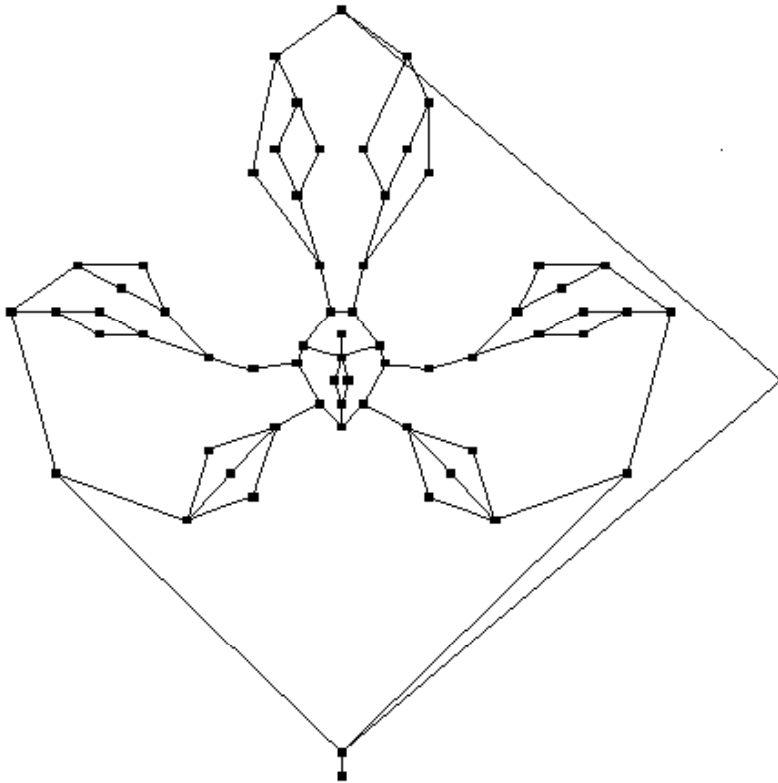


Рис. 2.21

Пусть на плоскости задано множество  $S$  точек  $P_i, i = 1, \dots, n$ , в которых известны значения некоторой функции  $f_i, i = 1, \dots, n$ .

Многоугольник  $M_k$  с упорядоченным набором вершин  $P_i, i = 1, \dots, k$ , называется *простым*, если никакая пара его несмежных ребер не имеет общих точек.

Простой многоугольник  $M_k$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек  $g$  и  $q$  из  $M_k$  соединяющий их отрезок целиком принадлежит  $M_k$ .

Для нахождения выпуклого многоугольника по  $n$  точкам на плоскости можно использовать, например, метод Джарвиса (метод «заворачивания подарка») или метод обхода Грэхема [46].

Построим выпуклый многоугольник так, чтобы его вершины принадлежали множеству заданных точек, а все точки, не попавшие в вершины, лежали внутри него.

Триангуляция полученного многоугольника дает треугольную сетку с вершинами,  $P_i, i = 1, \dots, n$ , изображенную на рис. 2.22 для  $n = 8$ . Любые два треугольника в этом случае либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину или одну общую сторону. Очевидно, что такая триангуляция может быть выполнена не единственным образом. Пусть среди  $n$  точек плоскости ( $n > 2$ ) не все из них коллинеарные, а  $k$  – число внутренних точек соответствующего многоугольника. Тогда при любом способе триангуляции число треугольников  $Q = n - k + 2$ , а число ребер такого графа  $m \leq 3n - 6$ .

Если необходимо осуществить триангуляцию не на заданных точках, а для выпуклой односвязной области  $D$ , то можно начать с задания трех упорядоченных точек на границе области. Одним из способов оптимизации этого процесса является триангуляция Делоне [46 – 49].

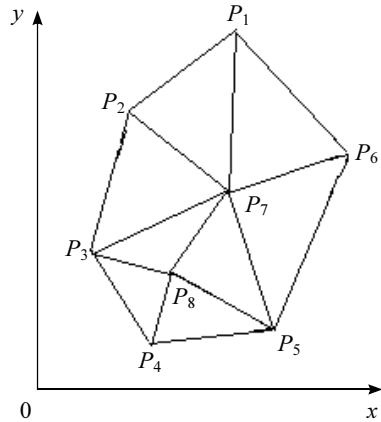


Рис. 2.22

Триангуляция набора из  $n$  точек на плоскости называется *триангуляцией Делоне*, если окружность, описанная вокруг каждого из треугольников, не будет содержать внутри себя точек набора  $n$ . В этом случае достигается максимум минимального угла по всем треугольникам, что повышает точность интерполяции.

Триангуляция, приведенная на рис. 2.23, *а* является триангуляцией Делоне, а на рис. 2.23, *б* – нет, так как существует окружность, содержащая внутри себя точку набора  $n$ .

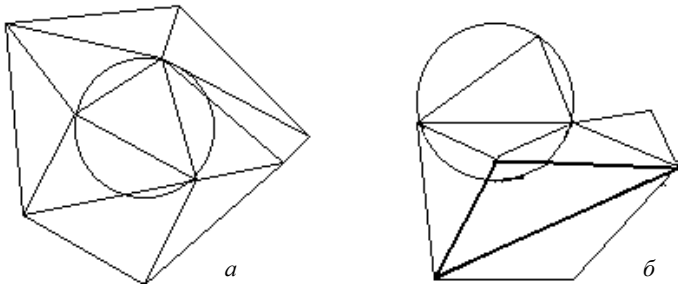


Рис. 2.23

Если набор  $n$  содержит не менее трех неколлинеарных точек и никакие 4 точки из  $n$  не лежат на одной окружности, то такая триангуляция единственна. Соответствующий ей граф назовем *графом Делоне* (или *сеткой Делоне* в терминах теории интерполирования). Отметим, что для квадрата, например, триангуляция Делоне неоднозначна.

При интерполировании на нерегулярной сетке в выпуклом многоугольнике  $M_k$  возникает задача определения треугольника, содержащего заданную точку  $P(x, y)$  [50].

Условия принадлежности этой точки треугольнику, например, с вершинами  $(p_1, p_2, p_3)$ , если они пронумерованы против часовой стрелки, имеют вид

$$\Delta(P, p_2, p_3) > 0, \quad \Delta(p_1, P, p_3) > 0, \quad \Delta(p_1, p_2, P) > 0,$$

где  $(x_i, y_i)$  – координаты вершин выбранного треугольника;  $\text{mod } \Delta$  – его удвоенная площадь

$$\Delta(p_1, p_2, p_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сплайном первой степени на нерегулярной сетке называется функция, которая внутри каждого треугольника представима в виде

$$S(x, y) = ax + by + c, \quad (5)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  постоянны для выбранного треугольника.

Рассмотрим треугольник  $(p_1, p_2, p_3)$ , изображенный на рис. 2.24, в вершинах которого заданы соответственно значения  $f_1, f_2, f_3$ .

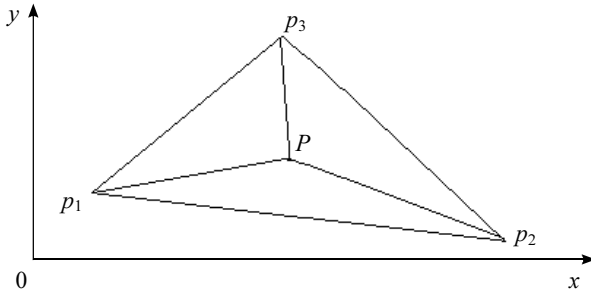


Рис. 2.24

Тогда для определения трех коэффициентов из (5) получим систему линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= f_1 \\ ax_2 + by_2 + c &= f_2 \\ ax_3 + by_3 + c &= f_3 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Определив коэффициенты из системы (6), для сплайна (5) получим

$$S(x, y) = (\Delta_1(f)x + \Delta_2(f)y + \Delta_3(f)) / \Delta. \quad (7)$$

Полином (7) можно переписать в виде

$$S(x, y) = \frac{1}{\Delta} [f_1 \Delta(p, p_2, p_3) + f_2 \Delta(p_1, p, p_3) + f_3 \Delta(p_1, p_2, p)].$$



Такая форма записи удобна для интерполяции внутри треугольника для нескольких массивов сеточных функций.

Локальный сплайн вида (6) дает возможность восстановить значение функции  $f(x, y)$  в любой точке треугольных граней, содержащихся в выпуклом многоугольнике  $M_k$ .

*Диаграмма Вороного* [40, 46, 49] конечного множества  $S$  точек на плоскости – это такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества  $S$ , чем к любому другому элементу этого множества. Область разбиения  $V(i)$ , содержащая элемент  $P_i \in S$ , называется многоугольником Вороного. Такие многоугольники впервые были рассмотрены русским математиком Вороным (1868 – 1908), использовавшим их в работе по квадратичным формам. Иногда  $V(i)$  также называют ячейками Дирихле или многоугольниками Тиссена.

Будем считать, что на множестве  $S$  можно построить единственную триангуляцию Делоне с остроугольными треугольниками, тогда центры описанных окружностей лежат внутри треугольников. Пусть  $P_i \in S$  является внутренней точкой выпуклого многогранника, построенного на множестве точек  $S$ . Пусть  $k$  треугольников триангуляции Делоне имеют общую вершину  $P_i$ . Соединив центры описанных окружностей смежных треугольников этой группы, получим замкнутый выпуклый многоугольник, содержащий  $k$  вершин. Он и является ячейкой  $V(i)$  диаграммы Вороного, имеющей центр в точке  $P_i$ , как это изображено на рис. 2.25 для  $k = 5$ .

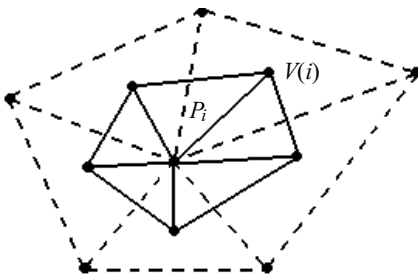


Рис. 2.25

Из построения следует, что каждое ребро диаграммы Вороного является отрезком прямой, перпендикулярной ребру триангуляции, соединяющему некоторую пару точек множества  $S$ , и делящей этот отрезок (ребро) пополам. Таким образом, каждое ребро триангуляции принадлежит в точности двум много-

угольникам Вороного. Рассмотренный способ построения диаграммы, который не является единственным, предполагает наличие триангуляции Делоне на множестве  $S$ . Отметим, что диаграмма Вороного строится на плоскости, поэтому ячейки  $V(i)$ , соответствующие вершинам выпуклой оболочки  $M_k$ , являются неограниченными.

Соседями назовем центры тех ячеек Дирихле – Вороного, которые имеют общую сторону с ячейкой для  $P_i$ . Например, на рис. 2.25 ячейка Дирихле имеет пять соседей.

Координаты вершин ячейки  $V(i)$ , являющиеся центрами соответствующих описанных окружностей, можно определить через координаты соседей и точки  $P_i$ . Уравнение окружности, проходящей, например, через точки с координатами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Или, разлагая определитель по первой строке, получим другую запись уравнения окружности:

$$a(x^2 + y^2) - bx + cy - d = 0,$$

где 
$$a = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда 
$$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{4ad + b^2 + c^2}{4a^2}$$

и для координат вершин ячейки  $V(i)$  получим

$$\bar{x} = \frac{b}{2a}, \quad \bar{y} = \frac{-c}{2a}.$$

Рассмотрим теперь граф, двойственный диаграмме Вороного, т.е. граф, уложенный на плоскости и получаемый в результате соедине-



Рис. 2.26

ния отрезками каждой пары точек множества  $S$ , многоугольники Вороного которых имеют общее ребро. В результате получается граф с вершинами в  $n$  точках множества  $S$ , как это показано на рис. 2.26.

Делоне показал, что граф, двойственный диаграмме Вороного, является триангуляцией множества  $S$ .

**Утверждение 2.8.** Диаграмма Вороного множества из  $n$  точек имеет не более  $2n - 5$  вершин и  $3n - 6$  ребер.

**Доказательство.** Каждому ребру графа, двойственного диаграмме Вороного, соответствует единственное ребро диаграммы. Двойственный граф является триангуляцией, а значит, планарным графом с  $n$  вершинами. В соответствии с формулой Эйлера он имеет не более  $3n - 6$  ребер и  $2n - 4$  граней. Следовательно, диаграмма Вороного имеет не более  $3n - 6$  ребер. Однако лишь ограниченные грани (их не более  $2n - 5$ ) соответствуют вершинам этой диаграммы при отображении двойственности. ■

Диаграмма Вороного является *регулярным графом* (все ее вершины имеют одну и ту же степень) со степенью вершин, равной трем.

Любой многоугольник Вороного может иметь до  $n - 1$  ребер, но полное число ребер не превосходит  $3n - 6$ , при этом каждое ребро принадлежит в точности двум многоугольникам. Это значит, что среднее число ребер многоугольника Вороного не превосходит шести.

Диаграмма Вороного является классическим математическим объектом, что позволяет упростить решение большого класса задач определения близости.

Задача построения зон близости требует нахождения всех точек плоскости, для которых расстояние  $\rho$  до объектов множества  $\{P_i\}$  минимально. В случае, когда все объекты точечные, эта задача сводится к построению диаграммы Вороного. Например, такие диаграммы могут использоваться не только для нахождения зон скорейшего обслуживания (достижимости) из заданных базовых пунктов, но и при решении краевых задач [51 – 55].

В археологии ячейки Дирихле используются для нанесения на карту ареала применения орудий труда в древних культурах и для изучения влияния соперничающих центров торговли. В экологии возможности организма на выживание зависят от числа соседей, с которыми он должен бороться за пищу и свет. Использование диаграммы Вороного, отражающей картину расселения животных и распределения жизненно важных ресурсов, помогает исследовать эффект перенаселенности. Совместное влияние электрических и близкодействующих сил, для изучения которых строятся сложные диаграммы Вороного, помогает определять структуру молекул.

Среди множества известных методов восстановления сеточных функций особое место занимает интерполяция Сибсона [56], которая основана на разбиении пространства по ячейкам Дирихле.

Пусть на множестве  $S$  узлов интерполяции  $P_i, i = 1, \dots, n$ , известна диаграмма Вороного. Если  $P_0$  – точка интерполирования, то построим диаграмму на множестве из  $n + 1$  точки  $P_0, P_i, i = 1, \dots, n$ . Интерполяция Сибсона основана на вычислении линейной комбинации

$$f_0 = \sum_{m=1}^M \alpha_m f_m, \quad \sum_{m=1}^M \alpha_m = 1, \quad \alpha_m = \beta_m / D \geq 0, \quad (8)$$

где  $M$  – число соседей точки  $P_0$ ,  $\alpha_m$  – весовые коэффициенты,  $D$  – площадь ячейки Дирихле для точки  $P_0$ .

Коэффициенты  $\beta_m$  есть площади, которые вырезаются из ячейки Дирихле для точки  $P$  соответствующими ячейками Дирихле, принадлежащими соседям  $P_0$  и построенными по множеству  $S$ .

Несибсоновская интерполяция [57] опирается на аналогичное определение соседей точки  $P_0$ . Она отличается от сибсоновской определением коэффициентов  $\alpha_m$  в формуле (8). Пусть точка  $P_0$  принадлежит ячейке Дирихле  $V(0)$  с числом сторон, равным  $M$ . Обозначим длины сторон многоугольника через  $s_m, m = 1, \dots, M$ , а высоты, опущенные из  $P_0$  на  $s_m$  (или расстояние от  $P_0$  до  $m$ -й грани), – через  $h_m$ , как это изображено на рис. 2.27 для  $m = 4$ .

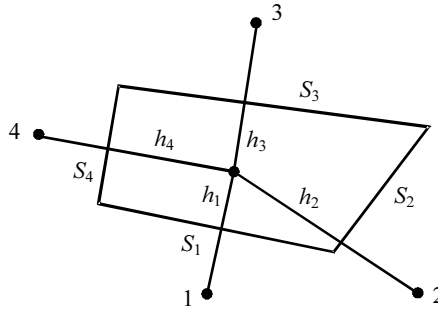


Рис. 2.27

Тогда значение  $f_0$  вычисляется по формуле

$$f_0 = \sum_{m=1}^M \alpha_m f_m, \quad \alpha_m = (s_m / h_m) \left( \sum_{j=1}^M s_j / h_j \right)^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Недостатком такого алгоритма является необходимость перестроения ячеек Дирихле в окрестности точки интерполирования и первый порядок точности. Однако этот метод по сравнению с методом Сибсона прост в реализации, особенно в многомерном случае, обладает свойством однозначности. Поэтому он находит применение при численном решении краевых задач, в алгоритмах компьютерной графики и многомерной интерполяции, картографии и геодезии, где важна скорость работы алгоритмов.

Отметим, что центры ячеек Дирихле, являющиеся центрами тяжести многоугольников, часто используются как узлы неструктурированной сетки в методе конечных объемов.

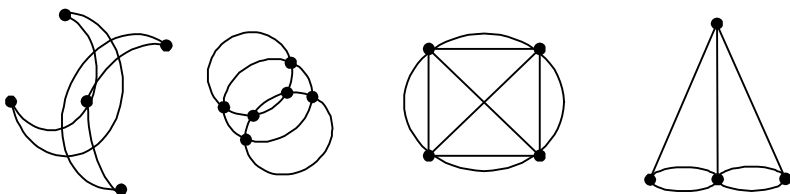
### Задачи

1. Доказать, что для плоского графа с  $p$  компонентами связности формула Эйлера имеет вид

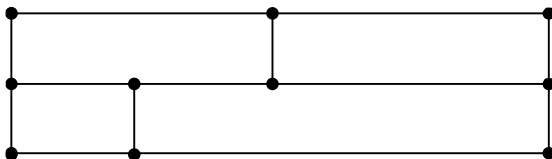
$$n - m + f = p + 1.$$

2. Доказать, что число граней любой укладки планарного связного графа не зависит от выбора укладки.

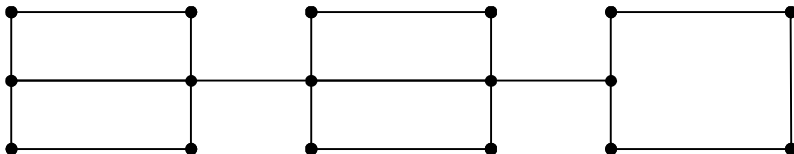
3. Существует ли эйлеров цикл в графах?



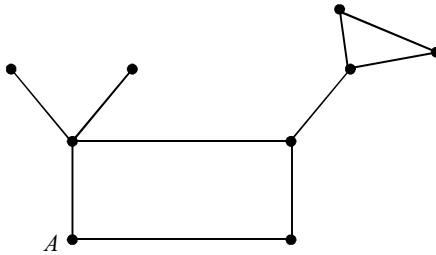
4. Отыскать эйлеровы цепи в графе.



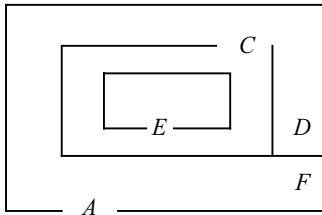
5. Где на выставке следовало бы сделать выход и вход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом один раз?



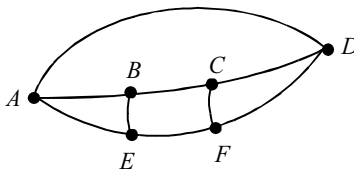
6. Найти замкнутый маршрут из вершины  $A$ , содержащий все ребра графа дважды.



7. Нарисовать граф, соответствующий лабиринту.



8. Пусть трамвайная сеть связывает 6 остановок. Требуется найти минимальное число маршрутов, обеспечивающих проезд пассажиров из любого пункта в любой с пересадками или без них. Каждый трамвай при этом должен двигаться по своему маршруту [36].

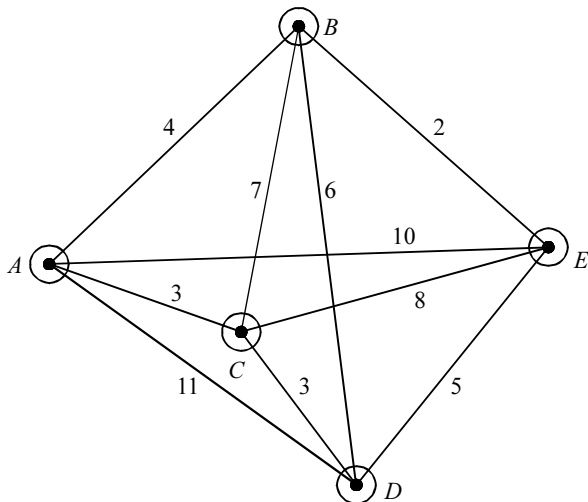


9. На плоскости расположено  $n$  различных точек. Через каждые две из них проведена прямая. Оказалось, что таких прямых 21. При каких  $n$  это возможно?

10. В треугольнике  $ABC$ , наибольший угол которого меньше  $2\pi/3$ , известны координаты вершин. Определить координаты точки  $P$  внутри треугольника, для которой сумма расстояний от  $P$  до вершин  $A, B, C$  была бы минимальной (задача Торричелли – Ферма [18]).

11. Сколькими способами можно осуществить триангуляцию выпуклого шестиугольника непересекающимися диагоналями. Нарисовать все варианты такой триангуляции.

12. Нарисовать дерево маршрутов и определить максимальный и минимальный гамильтонов цикл.





*Владимир Николаевич Берцун*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ГРАФАХ**

**Часть 1**

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Полковникова*

Дизайн, верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 954240

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 18.12.2006.  
Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Уч.-изд. л. 8,23 Тираж 200 экз. Заказ № 55.

---

ООО «Издательство научно-технической литературы»  
634050, Томск, пл. Ново-Соборная, 1, тел. (3822) 533-335

Отпечатано в типографии ЗАО «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1